C. NĂSTĂSESCU
C. NIȚĂ
M. BRANDIBURU
D. JOIȚA

ALGEBRĂ

-EXERCIȚII ȘI PROBLEME-

IX-XII

C. NASTĂSESCU
M. BRANDIBURU

C. NIȚĂ
D. JOIȚA

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE ALGEBRĂ

pentru clasele IX–XII

Partea întîi

ENUNȚURI

Capitolul I

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $2+3=5$; b) $2\cdot 3<6$; c) $4\cdot 4=16$; d) $4+3<1+5$; e) $4\cdot 5-6=2\cdot 7$; f) $4-2(5-3)=1$; g) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}<1$.

2. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) există un număr întreg x, astfel încît $x^2-2x-3=0$;
b) există un număr real x, astfel încît $|x-1|+|x-2|=0$;
c) există un număr real x, astfel încît $x^2-x+1=0$;
d) există un număr real x, astfel încît $|x-1|+|x^2-3x+2|=0$;
e) există un număr real x, astfel încît $|x-1|-|x-2|<0$;
f) oricare ar fi numărul real x, avem $x^2+(x-1)^2>0$;
g) oricare ar fi numărul real x, avem $(x+1)^2+|x^2-2x+3|>0$;
h) oricare ar fi numărul real x, avem $|x-1|+|x-3|\neq 0$;
i) oricare ar fi numerele reale x și y, avem $x^2+y^2+1>0$;
j) oricare ar fi numerele reale x și y, avem $x^2+y^2>0$;
k) există numerele reale x și y astfel încît $|x-1|+y^2+y+1=0$.

3. Folosind tabele de adevăr, să se verifice:

a) $p\vee q\equiv q\vee p$; b) $p\wedge q\equiv q\wedge p$; c) $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$; d) $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$; e) $p\to\urcorner q\equiv\urcorner(p\wedge q)$; f) $\urcorner p\to q\equiv p\vee q$; g) $(p\to q)\to q\equiv p\vee q$; h) $p\vee p\equiv p$; i) $p\wedge p\equiv p$; j) $p\wedge q\equiv\urcorner(\urcorner p\vee\urcorner q)$; k) $p\vee q\equiv\urcorner(\urcorner p\wedge\urcorner q)$; l) $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$; m) $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

4. Să se arate că următoarele formule sînt tautologii (sau identic adevărate):

a) $\urcorner(p\vee q)\to(\urcorner p\wedge\urcorner q)$; b) $\urcorner(p\wedge q)\to(\urcorner p\vee\urcorner q)$; c) $(p\wedge(p\to q))\to q$; d) $(\urcorner q\wedge(\urcorner p\to q))\to p$; e) $(\urcorner q\wedge(p\to q))\to\urcorner p$; f) $((p\to q)\wedge(\urcorner p\to q))\to q$; g) $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$; h) $(p\vee(p\wedge q))\longleftrightarrow p$; i) $(p\wedge(p\vee q))\longleftrightarrow p$.

5. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $(\exists x)\ (x^2-5x+6=0)$ unde x desemnează un număr întreg;
b) $(\exists x)\ (2x^2-x-3=0)$ unde x desemnează un număr întreg pozitiv;
c) $(\exists x)\ (|x-6|+|x+1|=0)$ unde x desemnează un număr real;
d) $(\exists x)\ (2x-6<0)$ unde x desemnează un număr întreg pozitiv;
e) $(\forall x)\ (3x-1<0)$ unde x desemnează un număr real pozitiv;
f) $(\forall x)\ (|x-2|+|x+3|>0)$ unde x desemnează un număr real;
g) $(\forall x)\ (|x-2|+|2x^2-3x+2|>0)$ unde x desemnează un număr real;

h) $(\forall x)\ (\forall y)\ (x^2 + y^2 - y + 1 > 0)$ unde x şi y desemnează numere reale;

i) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x^2 + xy + y^2 + 1 = 0)$ unde x şi y desemnează numere reale.

6. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x - y = 3$" unde x şi y desemnează numere reale. Să se arate că propoziţia

$$(\forall y)\ (\exists x)\ p(x, y) \rightarrow (\exists x)\ (\forall y)\ p(x, y) \text{ este falsă.}$$

7. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x + y \leqslant 1$" unde x şi y desemnează numere reale. Să se arate că propoziţia

$$(\forall y)\ (\exists x)\ p(x, y) \rightarrow (\exists x)\ (\forall y)\ p(x, y) \text{ este falsă.}$$

8. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x \leqslant y$" unde x, y desemnează numere întregi.

a) Să se determine valorile de adevăr pentru propoziţiile: $p(1, 5)$; $p(3, -1)$; $p(3, 4)$; $p(3, 1)$; $p(45, 11)$; $p(-2, -10)$.

b) Să se determine valorile de adevăr ale propoziţiilor:

$$(\forall x)\ \forall(y)\ p(x, y),\ (\forall x)\ (\exists y)\ p(x, y),\ (\forall y)\ (\exists x)\ p(x, y),\ (\exists x)\ (\exists y)\ p(x, y).$$

9. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(\forall x)\ [(x > 0) \rightarrow (x^2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;

b) $(\forall x)\ (\forall y)\ [(x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)]$, unde x, y sînt numere reale;

c) $(\forall x)\ [(x < -2) \rightarrow (|x - 1| - 2 > 0)]$, unde x desemnează un număr real;

d) $(\forall x)\ (\forall y)\ [(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$, unde x, y desemnează numere reale pozitive;

e) $(\forall x)\ (\forall y)\ [(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$, unde x şi y desemnează numere reale oarecare.

Capitolul II

MULŢIMI

1. Să se determine mulţimile:

a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 6x - 7 = 0\}$; b) $\{x \in \mathbf{N} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$;
c) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$; d) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x^2 + 2x - 1 = 0\}$;
e) $\{x \in \mathbf{Q} \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$; f) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 2 = 0\}$;
g) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| + 1 = 0\}$; h) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| - |x - 3| = 1\}$;
i) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x^2 - 4| - 2x + 1 = 0\}$; j) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2|x| + 3 = 0\}$;
k) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\}$; l) $\{x \in \mathbf{R} \mid 3x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0\}$;
m) $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^3 - 5x + 1 = 0\}$; n) $\{x \in \mathbf{Q} \mid |x - 1| + |x - 2| = 3\}$;
p) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| + |x + 2| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$;
q) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| - |x - 4| = 3\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| - |x - 3| = 1\}$.

2. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,
b) $A \cap B = \{7, 8, 9, 10\}$,
c) $B - A = \{4, 5, 6, 11\}$.

3. Să se determine mulţimea E în următoarele cazuri:

a) $\{1, 2, 3, 4\} \subset E$, $\{3, 4, 5, 6\} \subset E$, $E \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şi $\{7, 8\} \cap E = \emptyset$;
b) $E \subset \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $E \subset \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{3, 4\} \subset E$ şi $7 \notin E$.

4. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{3, 4\}$;
c) $A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$; d) $\{1, 2\} \cap B = \emptyset$.

5. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $B - A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; c) $\{3, 9\} \cap \cap B = \emptyset$, d) $A \cap B = \{1\}$.

6. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine submulţimile B ale lui A astfel încît $B \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$.

7. Fie mulţimea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Să se determine mulţimea formată din toate submulţimile lui A care au proprietatea că nu conţin elementele a şi c.

8. Fie mulţimea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se determine mulţimea submulţimilor lui X care au cel mult două elemente.

9. Să se determine mulţimea E şi submulţimile A şi B ale lui E, ştiind că:

a) $E - A = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; b) $E - B = \{5, 6, 11, 12\}$; c) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$.

10. Fie mulţimile $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{5, 7, 8, 9\}$. Să se determine mulţimea X astfel încît să aibă loc relaţia $(A - X) \cup (X - B) = \{1, 3\}$, X să aibă 4 elemente şi $\{3, 9\} \subset X$.

11. Fie mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Să se determine mulţimea X astfel încît să aibă loc relaţia $A - X = \{1, 2, 3\}$, $X \subseteq B$ şi X să aibă 3 elemente.

12. Să se determine mulţimile A şi B astfel încît să fie îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $A \cap B \supset \{1, 2\}$; c) $3 \notin B$; d) Numărul de elemente ale lui A să fie mai mic decît numărul elementelor lui B.

13. Să se arate că dacă A şi B sînt două mulţimi, atunci:

a) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$; b) $A = B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ şi $B - A = \emptyset$.

14. Fie A şi B două submulţimi ale lui E. Dacă notăm $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, să se arate că

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \complement_E B \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap B \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B \cap C) \cup (A \cap B \cap C),$$ oricare ar fi submulţimile A, B, C ale lui E.

15. Fie E o mulţime care conţine două elemente. Să se determine soluţiile (X, Y) ale ecuaţiei $X \cup Y = E$.

16. Fie E o mulţime care conţine două elemente. Să se determine soluţiile (X, Y) ale ecuaţiei $X \cap Y = \emptyset$ (X, Y sînt submulţimi ale lui E).

17. Să se determine mulţimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid x = \dfrac{6n - 7}{2n + 1},\ n \in \mathbf{Z}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbf{N} \mid x = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1},\ n \in \mathbf{N}\right\}$.

18. Să se determine mulţimea

$$A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid x = \frac{6n^2 + 7}{3n + 1},\ n \in \mathbf{Z}\right\}.$$

19. Să se determine mulţimea $\left\{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, a \in \mathbf{R} \text{ astfel încît } x = \dfrac{a^2 - a + 1}{a + 1}\right\}$.

20. Să se determine mulţimea $A = \left\{x \in \mathbf{N} \mid \exists n \in \mathbf{N}, x = \dfrac{3n^2 + 6n + 1}{n^2 + 1}\right\}$.

21. Să se determine mulţimea

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 2 \text{ şi } |x| - 2|y| = -1\}.$$

22. Să se determine mulţimea

$$A = \{(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid ab = 2160 \text{ şi } c.m.m.d.c.\ (a, b) = 12\}.$$

(*c.m.m.d.c.* (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.)

23. Să se determine mulţimea $\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 9y^2 - (x+1)^2 = 32\}$.

24. Să se determine mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x+1| - |x-2| < 3\}$.

25. Să se determine mulţimea $\{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x^2 - 2xy + 3y^2 = 8\}$.

26. Să se determine numărul de elemente din mulţimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x + 3y = 1980\}.$$

27. Să se determine numărul de elemente din mulţimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid 4x + 3y = 1980\}.$$

28. Să se determine mulţimile A şi B şi numerele m, n, p, ştiind că: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + nx + p = 0\}$, $A \cup B =$
$= \{-1, 1, 2, 4\}$.

29. Fie $m \in \mathbf{R}$. Considerăm mulţimea
$A_m = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, a \in \mathbf{R} \text{ astfel încît } x = \dfrac{a^2 + a + m}{a + 1}\right\}$. Să se arate că:

I) $A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}$;
II) $A_m = \mathbf{R}$, $(\forall)\, m < 0$;
III) Mulţimile A_m, cînd m parcurge mulţimea $\mathbf{R}$, nu au nici un element comun.

30. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$, numere impare. Să se arate că: $\{x \in \mathbf{Q} \mid ax^2 + bx + c = 0\} = \emptyset$.

31. Fie mulţimile: $A = \{x \mid \exists n \in \mathbf{N},\ x = 3n + 1\}$,

$B = \{x \mid \exists m \in \mathbf{N},\ x = 7m - 1\}$.

Să se arate că $A \cap B = \{x \mid \exists t \in \mathbf{N},\ x = 21t + 13\}$.

32. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, are loc egalitatea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + m^2 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + 1 = 0\} = \emptyset.$$

33. Fie a, b două numere reale. Să se arate că, dacă $a + b + 1 = 0$, $a \neq b$, $a, b \neq 1$ sau $b = \dfrac{a^2}{4}$ şi $a > 4$, mulţimea

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + ax + b = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + bx + a = 0\}$$

are trei elemente.

34. Să se arate că mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 8x + 2m^2 = 0\}$ are exact două elemente, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

35. Să se arate că mulţimea

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 4x^2 + 8x + m^2 = 0\}$$

are unul sau două elemente. Să se determine m pentru care A are un singur element.

36. Să se determine numărul de elemente din mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + m - 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m+1)x + m = 0\}.$$

37. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2(m+1)x + m = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2mx + m - 1 = 0\}$$

are exact patru elemente.

38. Să se determine numărul real m, astfel încît mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m-1)x + m + 2 = 0\} \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset.$$

39. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + m = 0\} \cap [0, \infty).$$ Discuție.

40. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x + m = 0\}.$$ Discuție.

41. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap (-\infty, 0].$$ Discuție.

42. Să se determine numărul de elemente din mulțimea:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 = 0\} \cap [0, +\infty).$$ Discuție.

43. Să se determine a și b astfel încît să avem:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\} \setminus \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a = 0\} = \emptyset.$$

44. Fie A și B două submulțimi ale lui E. Folosind problema **14**, să se determine submulțimea X a lui E, astfel încît să avem egalitatea

$$(A - X) \cup (X - A) = B.$$

Capitolul III

FUNCȚII

1. Fie $A = \{0, 1\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcțiile de la mulțimea A în mulțimea B. Să se precizeze cîte din acestea sînt injective.

2. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcțiile $f : A \to B$ astfel încît $f(1) = c$.

3. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{5, 7, 9\}$. Să se determine toate funcțiile $f : A \to B$ astfel încît $f(1) \neq 5$ și $f(2) \neq 9$.

4. Să se determine funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît:

$$2f(x) + 3f(1 - x) = 4x - 1 \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

5. Să se determine funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avînd proprietatea:

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

6. Să se determine funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît

$$f(1) \neq 0 \text{ și } f(x) \cdot f(y) = f(x + y - xy), \ (\forall) x, y \in \mathbf{R}.$$

7. Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care să verifice relația: $f(x) + f(n - x) = x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

8. Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) - f(-x) = x^2$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$?

9. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfăcînd condiția:

$$mf(x - 1) + nf(-x) = 2\,|\,x\,| + 1.$$

Să se determine m și n astfel încît funcția f să îndeplinească condițiile $f(-2) = 5$ și $f(1) = 1$.

10. Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$f(x - 1) - f(1 - x) = x, \ (\forall) x \in \mathbf{R}?$$

11. Să se determine funcția f care verifică relația:

$$4f(x) + 3f(-x) = c\,|\,x\,|, c \in \mathbf{R}.$$

Să se traseze graficul funcției astfel determinate.

12. Să se determine funcțiile f, de gradul întîi, astfel încît $f \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.

13. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. Să se determine

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}}.$$

14. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(2x - 1,\ x + 1)$,

b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \min(3x - 1,\ x + 3)$.

15. Fie funcţiile: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| + 2$ şi

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = |x - 2| + 1.$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

16. Fie funcţiile: $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = 2n$ şi

$$g : \mathbf{N} \to \mathbf{N},\ g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

17. Fie funcţiile:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{dacă } x \leqslant -1, \\ -2, & \text{dacă } x > -1 \end{cases}$$

şi

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \begin{cases} -3, & \text{dacă } x \leqslant -2, \\ x - 1, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

18. Fie funcţiile:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 0, \\ x^2 + 3, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

şi

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x + 1.$$

Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

19. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{dacă } x \leqslant 2, \\ x + 1, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze f^{-1}.

20. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geqslant 2, \\ 3x - 2, & \text{dacă } x < 2. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

21. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x \leqslant 4, \\ 2x - 7, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$

Să se arate că f este inversabilă şi să se calculeze f^{-1}.

22. Să se arate că următoarele funcţii nu sînt injective:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$; b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 - 7x^4 + 1$; c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$; d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{1981} - 4x^{1979} + 1$.

23. Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ definită prin egalitatea: $f(x) = x+\frac{1}{x}$.

Să se arate că pe intervalul $(0,1]$, f este strict descrescătoare iar pe intervalul $[1,+\infty)$ este strict crescătoare.

24. Fie funcţiile f şi g, definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$, unde

$$f(x)=2x^4+3x^3+4 \text{ şi } g(x)=x^3+x+2.$$

Să se arate că f nu este injectivă, iar g este injectivă.

25. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de forma $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{dacă } x\in(-\infty, 2],\\ mx-3, & \text{dacă } x\in(2, +\infty).\end{cases}$

a) Să se determine m astfel încît graficul funcţiei să treacă prin punctul $A(3,3)$.

b) Să se cerceteze dacă funcţia f este injectivă.

26. Fie a un număr natural. Definim funcţia: $f_a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încît $f_a(n)$ este ultima cifră a numărului a^n.

I) Să se arate că $\exists b$, $0\leqslant b\leqslant 9$ astfel încît $f_a=f_b$.

II) Să se arate că oricare ar fi a, f_a este o funcţie periodică (adică există un număr natural n_0 astfel încît $f_a(n+n_0)=f_a(n)$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$ şi $n\neq 0$).

27. Fie A o mulţime care are cel puţin trei elemente. Notăm cu $S_A = \{f:A\to A \mid f \text{ bijecţie}\}$. Dacă $f\in S_A$ şi $f\circ g=g\circ f$, $(\forall)g\in S_A$, atunci $f=1_A$.

28. Fie $f:A\to B$ o funcţie oarecare. Dacă $A'\subset A$ este o submulţime a lui A, mulţimea $f(A')=\{f(x)\mid x\in A\}$ care este o submulţime a lui B se numeşte: *imaginea submulţimii A' prin funcţia f*.
Dacă $A'=A$, atunci mulţimea $f(A)$ se numeşte *imaginea funcţiei f* şi se notează Im f.

a) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se determine:

$$f([-1,1]);\ f([-2,0]);\ f((-2,1]);\ f((1,2)).$$

b) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-2|+1$.
Să se determine: $f([1,3])$; $f([-1,3])$; $f([1,+\infty))$.

c) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|+|x+2|-1$.
Să se determine: $f([0,1])$; $f([-2,1])$; $f([-3,2])$.

29. Fie $f:A\to B$ o funcţie. Să se arate că:

a) Dacă X şi Y sînt două submulţimi ale lui A, atunci:

$$f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y) \text{ şi } f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y).$$

b) f este injectivă dacă şi numai dacă $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$, oricare ar fi submulţimile X şi Y ale lui A.

30. Fie $f:A\to B$ o funcţie. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Leftrightarrow f(\complement A')\subset \complement f(A')$, $(\forall)A'\in\mathcal{P}(A)$;

b) f este surjectivă $\Leftrightarrow f(\complement A')\supset \complement f(A')$, $(\forall)A'\in\mathcal{P}(A)$;

c) f este bijectivă $\Leftrightarrow f(\complement A')=\complement f(A')$, $(\forall)A'\in\mathcal{P}(A)$.

($\mathcal{P}(A)$ este mulţimea părţilor lui A.)

31. Fie $f : A \to B$ o funcție. Fie $\mathcal{P}(A)$ și $\mathcal{P}(B)$ mulțimea părților lui A și respectiv ale lui B. Definim funcția $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $f_*(A') = f(A')$, $(\forall) A' \in \mathcal{P}(A)$. Să se arate că:

a) f injectivă $\Leftrightarrow f_*$ injectivă;
b) f surjectivă $\Leftrightarrow f_*$ surjectivă;
c) f bijectivă $\Leftrightarrow f_*$ bijectivă.

32. Fie funcția *semn*, sgn: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (2x - 1) \operatorname{sgn} x$;
b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1| \operatorname{sgn} x$;
c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1) + x \operatorname{sgn}(x - 2)$.

Capitolul IV

NUMERE REALE

(Structura algebrică şi de ordine a mulţimii numerelor reale)

Dacă a, b, c sînt numere reale, astfel încît oricare două sînt diferite între ele, să se demonstreze egalităţile:

1. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0.$

2. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1.$

3. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$

4. $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}=$
$=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab.$

5. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}.$

6. $\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}=$
$=\frac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2}.$

Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, să se demonstreze egalităţile:

7. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$
$+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0$; a, b, c, d fiind diferite între ele.

8. $\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}=$
$=\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}.$

Generalizare.

9. Fie a, b, c numere reale nenule, astfel încît oricare două sînt diferite între ele. Să se arate că produsul

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

este egal cu:

I) 9, dacă $a+b+c=0$;

II) 1, dacă $|c|=|a-b|$.

10. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

Să se deducă de aici că, dacă

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3,$$

atunci $(a+b+c)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$, unde $n \in \mathbf{N}$.

11. I) Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să arate că

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2];$$

II) Dacă $a^3+b^3+c^3=3abc$, atunci $a+b+c=0$ sau $a=b=c$.

12. Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, să se arate că:

I) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$;

II) $(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b \geqslant 6abc$;

III) $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant (a+b)ab+(b+c)bc+(c+a)ca$.

13. Să se demonstreze că, dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, astfel încît $a+b+c=1$, atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 9.$$

În ce condiții are loc egalitatea?

14. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

În ce condiții are loc egalitatea?

15. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $a+b=2$. Să se demonstreze că

$$a^4+b^4 \geqslant 2.$$

16. Să se demonstreze că, din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi dacă și numai dacă

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 > \frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4).$$

17. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c},$$

atunci pentru n, număr natural, avem

$$\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}.$$

18. I) Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că, dacă m şi n sînt numere naturale de aceeaşi paritate, atunci

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2};$$

II) Să se deducă, de aici, că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2} \leqslant \frac{a^6 + b^6}{2}.$$

19. Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, atunci

$$a + b + c \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

20. Fie a, b, c, d numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

21. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ astfel incît $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, să se arate că

$$\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leqslant 2\sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

În ce condiţii are loc egalitatea?

22. Să se demonstreze că

I) $ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$;

II) $ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqslant \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$;

III) *Generalizare.* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \leqslant \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.

23. Fie numerele raţionale $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, unde $b_i > 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Să se demonstreze că

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_i}{b_i}.$$

4. 2 Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \leqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i.$$

25. I) Dacă a, b, t sînt numere reale pozitive astfel încît $a > b > t$, atunci $(a+t)(b-t) < ab$.

II) Să se arate că produsul a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este maxim dacă toţi factorii sînt egali.

26. I) Dacă a, b sînt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

II) Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

III) *Generalizare.* Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

(*media geometrică* a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu *media aritmetică* a lor).

În ce condiţii are loc egalitatea?

27. Să se arate că pentru orice numere reale pozitive a, b, c, a', b', c', are loc inegalitatea:

$$\sqrt[3]{(a+a')(b+b')(c+c')} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'}.$$

28. Fie n un număr natural. Atunci

I) $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$; II) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$.

29. Să se arate că suma a n numere reale pozitive, al căror produs este constant, este minimă în cazul în care numerele sînt egale între ele.

30. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

31. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \ldots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant 3^n.$$

32. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1}{a_2} + 1\right)\left(\frac{a_2^2}{a_3^2} + \frac{a_2}{a_3} + 1\right) \ldots \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1\right)\left(\frac{a_n^2}{a_1^2} + \frac{a_n}{a_1} + 1\right) \geqslant 3^n.$$

33. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

(*media armonică* a n numere reale pozitive este mai mică sau egală cu *media geometrică* a lor).
În ce condiţii are loc egalitatea? (vezi ex. 26).

34. Fie $k_1, k_2, \ldots, k_n$ numere naturale şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se demonstreze că produsul $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}$, unde suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ este constantă, este maxim atunci cînd numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt proporţionale, respectiv, cu $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

35. Să se demonstreze că suma pătratelor a n numere reale pozitive, a căror sumă este constantă, este minimă în cazul în care numerele sînt egale.

36. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se demonstreze că

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}.$$

37. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Mai mult, egalitatea are loc numai în cazul în care numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt proporţionale, respectiv, cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$. (inegalitatea Cauchy-Buniakovski).

38. Să se demonstreze că:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale pozitive.

39. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt numere reale pozitive, să se demonstreze că

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n} \leqslant \sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}\sqrt{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

40. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

(inegalitatea lui Minkovski).

41. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

42. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \leqslant |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

43. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\right| \leqslant |a_1-b_1| + |a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|.$$

44. I) Dacă $a, a', b, b' \in \mathbf{R}$, atunci

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) - (ab + a'b')^2 = (ab' - a'b)^2;$$

II) *Generalizare.* Dacă $a_1, a_2, ..., a_n;\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

45. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2},$$

unde max (a, b), respectiv min (a, b), reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a și b.

46. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, atunci

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2(\max(a, b, c) - \min(a, b, c)),$$

unde max (a, b, c), respectiv min (a, b, c), reprezintă cel mai mare, respectiv cel mai mic, dintre numerele a, b, c.

47. Fie $x \in \mathbf{R}$ și se notează $x_+ = \frac{x + |x|}{2}$ și $x_- = \frac{-x + |x|}{2}$. Să se arate că $x = x_+ - x_-$ și $|x| = x_+ + x_-$. Să se reprezinte graficul funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = x_+$ și $g(x) = x_-$.

48. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că, ecuația $3x^2 + 2(a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$ are rădăcini reale dacă și numai dacă $a = b = c$.

49. Fie a și b numere reale pozitive. Să se scrie în ordine crescătoare numerele

$$a,\ b,\ \frac{a + b}{2},\ \sqrt{a^2 + b^2}.$$

50. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ ecuațiile:

I) $|3x + 2| = 5$; II) $|x + 1| = |x - 2|$; III) $|x - 1| + |x| + |x + 1| = x + 2$; IV) $||x| - 2| = 10$; V) $||x| - |x + 1|| = x + 2$; VI) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2$.

51. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale inecuațiile:

I) $|x - 2| \leqslant 1$; II) $|x + 2| > 1$; III) $|x - 1| + |x| - \leqslant 2$; IV) $|x + 1| + |x| > 2$; V) $|x - 1| + |x - 2| \leqslant 0$; VI) $|x + 1| + |x - 2| > 0$; VII) $|x - 1| + |x + 1| \leqslant x + 3$; VIII) $|x + 1| + |x - 2| > x + 1$; IX) $|x + 1| \leqslant |x - 1|$; X) $|x + 2| > |x - 1|$.

52. Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită numerele:

a) -5; b) $\frac{17}{6}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) 0; e) $\frac{27}{11}$; f) $-\frac{523}{21}$; g) $-\frac{201}{19}$.

53. Pentru fracțiile zecimale periodice următoare să se determine numărul rațional pe care-l reprezintă și să se verifice apoi, prin algoritmul de împărțire, că se obține fracția zecimală inițială:

a) 3,(6); b) 1,72(32); c) −3,(12); d) 0,01(25); e) −4,3(042); f) −0,001(3); g) 0,01(02).

54. Să se arate care dintre numerele următoare sînt raționale și care iraționale:

a) $-1,56$; b) $1,(560)$; c) $-2,53(9)$; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{6}$; g) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; h) $\sqrt[3]{2}$; i) $\sqrt[3]{3}$; j) $\sqrt[3]{6}$; k) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

55. Fie $1 \leqslant a \leqslant 9$. Să se arate că fracția

$$0,a0a00a000a0000a\,...$$

(după primul a urmează un 0, după al doilea sînt doi de 0 etc.) reprezintă un număr irațional.

56. Să se arate că fracția zecimală infinită 0,123456789101112..., în care după virgulă sînt scrise, consecutiv, toate numerele naturale nenule în ordine crescătoare, reprezintă un număr irațional.

57. Să se arate că în reprezentarea zecimală a oricărui număr irațional există cel puțin o cifră care se repetă de o infinitate de ori.

58. Să se dea exemple de numere iraționale pentru care numai două cifre, respectiv numai trei cifre, se repetă de o infinitate de ori.

59. Să se dea un exemplu de un număr rațional a și de un număr irațional b astfel încît

$$|\sqrt{3} - a| < \frac{1}{1\,000} \text{ și } |\sqrt{3} - b| < \frac{1}{1\,000}.$$

60. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$. Să se arate că există între a și b cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional.

61. Să se arate că pentru orice număr rațional pozitiv a, astfel încît $a^2 < 2$ (respectiv $a^2 > 2$), există un număr rațional pozitiv b, astfel încît $a^2 < b^2 < 2$ (respectiv $a^2 > b^2 > 2$).

62. Să se arate că numerele $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ și $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sînt iraționale.

63. Fie m și n numere naturale. Să se găsească condiții în care numerele $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ și $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ sînt iraționale. Dar dacă m și n sînt numere raționale pozitive?

64. Să se arate că, dacă a este un număr irațional pozitiv, atunci $\sqrt{a}$ este un număr irațional.

65. Să se demonstreze că:

I) Suma dintre un număr rațional și unul irațional este un număr irațional. Analog, pentru diferență.

II) Dacă a este irațional, atunci $\frac{1}{a}$ este irațional.

66. Fie a și b numere iraționale astfel încît $a + b$ este rațional. Să se demonstreze că numerele: $a - b$, $a + 2b$ sînt iraționale.

67. Fie $a, b, a', b' \in \mathbf{Q}$, astfel încît $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$. Atunci

I) $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ dacă și numai dacă $a = a'$ și $b = b'$.

II) $a + \sqrt{b} \neq a' - \sqrt{b'}$, pentru orice numere raționale a, b, a', b' iar $\sqrt{b}$ să fie irațional.

68. Să se determine numerele naturale n astfel încît $\sqrt{n^2 + 1}$ să fie rațional.

69. Să se determine cele mai mici numere naturale n, pentru care este adevărată inegalitatea $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, dacă

I) $\varepsilon = 0{,}001725...$; II) $\varepsilon = 0{,}0003254...$

70. Să se spună care dintre numerele, din perechile de numere următoare, este mai mare:

a) $5{,}34297...$ și $5{,}34298...$; b) $-6{,}2739...$ și $-6{,}2736...$; c) $\frac{7}{3}$ și $2{,}(42)$; d) $-\frac{5}{7}$ și $-0{,}7(32)$; e) $-2{,}2$ și $-2{,}1(9)$; f) π și $3{,}14$.

71. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decît 10^{-2}, prin lipsă și prin adaos, pentru numerele:

a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $-\frac{2}{5}$; e) $\sqrt{11}$; f) $-\sqrt{11}$; g) $\frac{7}{13}$; h) $-\frac{7}{13}$; i) $\frac{13}{11}$; j) $-\frac{13}{11}$.

72. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale sumei $x + y$, dacă

a) $x = 3{,}2745...$ și $y = 2{,}3478...$;
b) $x = 10{,}7373...$ și $y = -11{,}0354...$

73. Să se găsească primele două cifre, după virgulă, ale produsului xy, dacă:

a) $x = 1{,}3426...$ și $y = 1{,}1243...$;
b) $x = 2{,}1357...$ și $y = 3{,}2153...$.

74. Să se găsească primele patru cifre, după virgulă, ale sumelor

a) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$; c) $\frac{3}{4} + \sqrt{2}$; d) $\frac{2}{3} + \sqrt{5}$;

e) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; f) $\sqrt{3} - \frac{11}{9}$; g) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

75. Să se găsească primele trei cifre, după virgulă, ale produselor:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$; c) $\frac{3}{4} \cdot \sqrt{7}$; d) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{5}$; e) $-\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$; f) $-\frac{11}{9} \cdot \sqrt{5}$; g) $-0{,}710710071... \times \sqrt{6}$.

76. Să se găsească aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decît 10^{-3}, prin lipsă și prin adaos, pentru numerele:

a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$; b) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$; c) $\frac{3 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} + \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$;

d) $\frac{3 - \sqrt{2}}{5 + \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$.

77. a) Folosind teorema lui Pitagora, să se construiască cu rigla şi compasul segmentele de lungime:

$2;\ 3;\ 2,(6);\ 2{,}5;\ \sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{10}.$

b) Să se figureze, pe axa reală, punctele care au ca abscise opusele numerelor de la punctul a).

78. Să se determine numerele raţionale $\frac{1}{x}$ şi $\frac{1}{y}$, a căror sumă este egală cu 0, (272).

79. a) Fie $0 < \frac{a}{b} < 1$ un număr raţional, unde $a, b > 0$. Să se arate că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$, avem

$$\left|\frac{a+n}{b+n} - 1\right| < \left|\frac{a}{b} - 1\right|.$$

b) Mai mult, să se arate că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, un număr real arbitrar, există n_0 astfel încît

$$\left|\frac{a+n_0}{b+n_0} - 1\right| < \varepsilon.$$

80. Să se determine numerele întregi k, astfel încît rădăcinile ecuaţiei

$$kx^2 + (2k-1)x + k - 2 = 0$$

să fie raţionale.

81. Să se demonstreze că, dacă $a, b, c, \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ sînt numere raţionale, atunci $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ sînt, de asemenea, numere raţionale.

Generalizare.

82. Fie a un număr real şi notăm cu $\{a\} = a - [a]$ partea fracţionară a sa, iar $n \geqslant 2$ un număr natural. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(a) = \{a^n \sqrt{2}\}$ nu este injectivă.

83. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left[\frac{x+3}{4}\right] = \frac{x-2}{3}$; b) $\left[\frac{x^2-3x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{3}$.

84. a) Fie $\varepsilon \geqslant 0$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încît $|a_1| \leqslant \varepsilon$, $|a_{i+1} - a_i| \leqslant \varepsilon$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Să se arate că există un număr natural $k \leqslant n$, astfel încît

$$\left|a_k - \frac{1}{2}a_n\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

b) Să se deducă, de aici, că există un număr natural p, astfel încît

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=p+1}^{n} a_i\right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

85. Fie a, b numere raţionale pozitive şi $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$. Să se găsească, presupunînd că există, numerele raţionale x şi y astfel încît

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

În ce condiții astfel de numere există?
Aceeași problemă pentru egalitatea

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

86. Fie $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ astfel încît $m > 0$, $ac < 0$ și

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0.$$

Definim funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $f(x)=ax^2+bx+c$.
Să se demonstreze că

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1)<0.$$

87. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît $a \neq b$. Să se determine cea mai mică valoare a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=|x-a|+|x-b|.$$

Generalizare.

88. Să se arate că, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, avem

a) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}<\dfrac{3}{4}$;

b) $1<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}<2.$

89. Să se arate că

$$\sqrt[3]{2} \notin \{p+q\sqrt{r} \mid p, q, r \in \mathbb{Q}\}.$$

90. Să se determine mulțimea

$$\{a \in \mathbb{Q} \mid \text{există } b \in \mathbb{Q} \text{ astfel încît } 5a^2-3a+16=b^2\}.$$

91. Să se rezolve ecuația

$$x^3-[x]=3,$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

92. Fie $s=\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{11^2}+\dfrac{1}{12^2}+\ldots+\dfrac{1}{1\,000^2}$.

Să se arate că $|s-0{,}105|<0{,}006$.

93. Fie a un număr real care are o reprezentare zecimală de forma 0,999..., unde după virgulă sînt 100 de 9 consecutivi. Să se arate că $\sqrt{a}$ are o reprezentare zecimală în care după virgulă sînt, de asemenea, 100 de 9 consecutivi.

94. a) Fie $\alpha > \beta > 0$ numere reale. Să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \text{ și } \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$$

este mai mare.

b) *Generalizare*. Dacă n este un număr natural să se afle care dintre numerele

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}}{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n} \text{ și } \frac{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n}$$

este mai mare.

95. Fie $a, b, c \in \mathbf{Q}$, iar $p \in \mathbf{N}$ un număr prim. Să se arate că:

$$a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}=0 \text{ dacă și numai dacă } a=b=c=0.$$

96. Fie $[a]$ partea întreagă a numărului a. Să se demonstreze că:

a) $[x]+[y] \leqslant [x+y]$;

b) $\left[\frac{[x]}{x}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$; $n \neq 0$ fiind un număr întreg;

c) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$;

d) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

97. Fie numărul $\frac{n^2+5}{2\,100}$, unde n este un număr par.

a) Să se arate că fracția zecimală sub care se reprezintă acest număr rațional este mixtă.

b) Să se găsească cea mai mică valoare a lui n pentru care acest număr se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite.

c) Dacă presupunem că n este astfel încît fracția $\frac{n^2+5}{2\,100}$ este ireductibilă, să se determine numărul cifrelor din perioadă și al celor care nu sînt în perioadă.

98. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n $(n \neq 0, -1, -2)$, numărul $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă. La fel, pentru $\frac{3n^2+6n+2}{n(n^2-1)}$ $(n \neq 0, \pm 1)$.

99. a) Fie a un număr rațional, dat de fracția ireductibilă $\frac{m}{n}$, $(m, n)=1$, care se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică simplă. Să se arate că numărul k al cifrelor perioadei este cel mai mic număr natural astfel încît 10^k-1 să fie divizibil prin n.

b) Să se determine numitorii fracțiilor ireductibile care dau numere raționale ce se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică simplă, a cărei perioadă să aibă 1, 2, 3 sau 4 cifre.

c) Dacă n și n' sînt numitorii fracțiilor ireductibile, care dau numere raționale, care se reprezintă sub formă de fracții zecimale periodice simple avînd perioadele formate din k, respectiv k' cifre, să se arate că orice fracție ireductibilă cu numitorul nn' dă un număr rațional care se reprezintă sub forma unei fracții periodice simple. Mai mult, dacă n și n' sînt prime între ele, numărul cifrelor din perioada fracției zecimale periodice care

reprezintă numărul rațional dat de o fracție ireductibilă de numitor nn' este c.m.m.m.c. al numerelor k și k'.

100. Să se determine numerele raționale care se reprezintă sub formă de fracții zecimale mixte, avînd o cifră la partea neperiodică și două cifre în perioadă.

101. Fie $\frac{m}{7}$ și $\frac{n}{13}$ fracții ireductibile și p, respectiv p', numerele date, de perioadele fracțiilor zecimale periodice sub care se reprezintă numerele raționale $\frac{m}{7}$ și $\frac{m}{13}$. Să se arate că $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$.

102. Fie $\frac{m}{n}$ o fracție ireductibilă care dă un număr rațional ce se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice simple cu perioada formată din $n - 1$ cifre; fie aceasta $(a_1a_2 \ldots a_{n-1})$. Să se arate că orice altă fracție cu același numitor dă un număr rațional care se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică simplă cu perioada de forma $(a_ia_{i+1} \ldots \ldots a_{n-1}\ a_1a_2 \ldots a_{i-1})$, pentru un anumit i, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

103. a) Se dau numerele $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$, care au aceleași aproximări zecimale prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decît 10^{-p}. Să se arate că numărul $\frac{mk + m'k'}{nk + n'k'}$, în care k și k' sînt numere întregi, are aceleași aproximări zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decît 10^{-p}.

b) Cunoscînd resturile r și r' ale împărțirii lui $10^p \cdot m$ prin n și respectiv $10^p \cdot m'$ prin n', să se determine restul împărțirii lui $(mk + m'k') \cdot 10^p$ prin $nk + n'k'$.

Capitolul V

FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA. INECUAȚII. SISTEME DE ECUAȚII

1. Să se aducă la forma canonică următoarele funcții de gradul II:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$; b) $f(x) = -x^2 + 7x + 2$;

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 1$; d) $f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}2x + 0{,}3$;

e) $f(x) = -0{,}4x^2 + x + 0{,}1$; f) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

2. Să se determine axa de simetrie și vîrful parabolei asociat funcțiilor:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$; b) $f(x) = x^2 + x + 1$;

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 12$; d) $f(x) = x^2 - 2x - 1$;

e) $f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}1x + 0{,}4$; f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

3. Să se stabilească maximul sau minimul următoarelor funcții:

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$; b) $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 1$;

c) $f(x) = x^2 + 3x + 2$; d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$;

e) $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$; f) $f(x) = x^2 - 4$.

4. Să se stabilească semnul următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; d) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$;

b) $f(x) = -x^2 - 5x - 6$; e) $f(x) = -0{,}2x^2 + x - 0{,}8$;

c) $f(x) = x^2 + 3x + 13$; f) $f(x) = 0{,}4x^2 - 5x$.

5. Să se facă tabloul de variație și să se traseze graficul următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$; c) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$;

d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; e) $f(x) = -x^2 + 25$; f) $f(x) = -x^2 + 10x$.

6. Să se traseze graficul funcțiilor:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 2x + 1|$; b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = |-x^2 + 2x + 1|$;

c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = |x^2 - 5x| + 1$; d) $k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k(x) = |2x^2 - 3x| - 1$.

e) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \in (-\infty, -2), \\ x^2, & x \in [-2, 2], \\ x + 2, & x \in (2, +\infty); \end{cases}$

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 9| + |x^2 - 16|$;

g) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \min(x, x^2)$; h) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(x, x^2)$;

i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \min(1, x, x^2)$; j) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(1, x, x^2)$;

k) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max(2x, x^2)$; l) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leqslant 0; \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$

7. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |ax^2 - 3x + c|$.

Dacă $0 < a < 2$ şi $c < 0$, să se determine a şi c astfel încît $f(0) = 4$ şi $f(1) = 6$.

8. Să se determine funcţia de gradul al doilea, $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încît graficul acestei funcţii să treacă prin punctele: $A(1, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(2, 3)$.

9. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încît graficul acestei funcţii să treacă prin punctele: $A(-2, 20)$, $B(-1, 12)$ şi să taie axa Ox în punctul de coordonate $C(2, 0)$.

10. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încît să aibă vîrful în punctul $V(4, -4)$ şi să taie axa Oy în punctul $A(0, 12)$.

11. Să se arate că următoarele funcţii sînt strict crescătoare:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{dacă } x \geqslant 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x + 2, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

12. Să se arate că următoarele funcţii sînt strict descrescătoare:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ -x^2 + 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{dacă } x \leqslant 2, \\ -x^2 + 4x - 2, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$

13. Să se arate că funcţiile de la problemele **11** şi **12** sînt bijective şi să se determine inversele lor.

14. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ ştiind că admite un maxim egal cu 9 şi trece prin punctele $A(1, -7)$ şi $B(-1, -27)$.

15. Să se determine parametrul $m \in \mathbf{R}$ astfel încît între rădăcinile ecuaţiilor următoare să existe relaţia scrisă în dreptul fiecăreia:

a) $(m + 1)x^2 + 2mx + 5 = 0$, $\quad x_1 - x_2 = 2$;

b) $(m - 2)x^2 + (3m - 5)x + 3 = 0$, $\quad x_1 = x_2$;

c) $(m + 3)x^2 + mx + m + 1 = 0$, $\quad x_1 = 3x_2$;

d) $3x^2 + (m - 3)x + m + 5 = 0$ $\quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{8}{3}$;

e) $(m + 5)x^2 - (m + 7)x - m + 3 = 0$, $\quad x_1x_2 = x_1 + x_2$;

f) $mx^2 - (m - 1)x - m + 1 = 0$, $\quad x_1^3 + x_2^3 = 4$;

g) $mx^2 + (m^2 - 2)x + 2(m + 1) = 0$, $\quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$;

h) $(m + 2)x^2 + (m - 3)x + m = 0$; $\quad x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = \frac{3}{2}$;

i) $x^2 + mx + 2m + 8 = 0$, $\quad x_1 + 2x_2$;

j) $x^2 + 2(3m + 2)x + 3(2m + 1) = 0$, $\quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{10m}{3} x_1x_2$;

l) $x^2 - (m + 1)x + m = 0$, $\quad |x_1 - x_2| = 1$.

16. Să se calculeze, în funcţie de $m \in \mathbf{R}$, expresiile:

a) $x_1 + x_2$; b) x_1x_2; c) $x_1^2 + x_2^2$; d) $x_1 - x_2$; e) $x_1^3 + x_2^3$; f) $x_1^4 + x_2^4$; g) $x_1^5 + x_2^5$; h) $x_1^{-1} + x_2^{-1}$; i) $x_1^{-2} + x_2^{-2}$ j) $x_1^{-3} + x_2^{-3}$ cu $x_1, x_2 \neq 0$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - mx + m + 1 = 0$.

17. Să se calculeze, în funcţie de m, expresiile:

a) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$; b) $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - m^2x + m^2 + 1 = 0$.

18. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini:

a) $x_1 = 7$, $x_2 = -7$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$; c) $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{3}{5}$;

d) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{7}$; e) $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$.

19. Se dă ecuația $2x^2 + (m+1)x + 5m - 2 = 0$. Să se formeze ecuația în y ale cărei rădăcini îndeplinesc condițiile:

a) $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$; b) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$;

c) $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 x_2$; d) $y_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_2}$;

e) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$; f) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$; g) $y_1 = x_1^3$, $y_2 = x_2^3$;

h) $y_1 = x_1^{-2}$, $y_2 = x_2^{-2}$; i) $y_1 = x_1^{-3}$, $y_2 = x_2^{-3}$.

20. Să se rezolve inecuațiile:

a) $3x^2 + 5x + 3 > 1$; b) $-2x^2 + 6x - 3 < 5$; c) $6x^2 + 2x - 3 > 0$;
d) $5x^2 + 3x + 1 > 0$; e) $-8x^2 + 2x + 6 < 0$; f) $7x^2 + 3x - 4 < 0$;

g) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 3x + 4} > 3$; h) $\frac{5x + 7}{x - 2} - \frac{2x + 21}{x + 7} > \frac{2}{3}$;

i) $|x^2 - 9| + |x^2 - 16| < 47$; j) $\left|\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}\right| > 2$;

k) $\frac{|x^2 + 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} > 1$; l) $\frac{2x + 1}{2x^2 + 3x - 2} < 2$; m) $\left|\frac{3x - 1}{x^2 - 7x + 12}\right| < 1$.

21. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 7x^2 + 13x > 2, \\ -5x^2 + 6x - 1 < 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 1 \leqslant 0, \\ 3x^2 - 7x + 2 \leqslant 0, \\ -x^2 + 2x - 5 < 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} |3x^2 - 8x + 4| + x - 1 < 0, \\ x^2 + 3x + 7 > 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x - 1) \geqslant 4(x + 1), \\ x^2 + 4x > 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{|x - 3| + |3 - x|}{16 - x^2} \leqslant 1, \\ \frac{|x - 3| + |3 - x|}{16 - x^2} \geqslant -1. \end{cases}$

22. Să se determine m astfel încît $x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R}$.

23. Să se determine m astfel încît $x^2 + y^2 - 2x - y + m > 0$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R}$.

24. Să se rezolve inecuația $5x^2 - 20x + 26 \geqslant \frac{4}{x^2 - 4x + 5}$.

25. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$. Să se calculeze:
a) $f([0,2])$; b) $f([-2,4])$; c) $f([1,6])$; d) $f([-10,0])$ (a se vedea ex. 28, cap. III).

26. Fie funcția de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se calculeze:
a) $f([-4,0])$; b) $f([1,6])$; c) $f([3,5])$;
d) $f([3, +\infty))$; e) $f((-\infty -, -1])$; f) $f((-\infty, 3])$.

27. Să se determine Im f (a se vedea ex. 28, cap. III) pentru următoarele funcţii:

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+5x-6;$

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-x+1;$

c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=|x^2-4|+3;$

d) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x+1}$; e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x+3}$;

f) $f:\mathbf{R}-\{1,3\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$,

g) $f:\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{a+b}{2}\right\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-ab}{2x-a-b}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$.

28. Fie fracţia $E=\dfrac{x^2+2mx+3m-2}{x^2+2x+m}$. Să se determine m astfel încît fracţia E să aibă sens şi să fie pozitivă pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

29. Fie fracţia $E=\dfrac{-x^2+(m+1)x-\dfrac{1}{2}}{x^2+2mx+m-1}$.

I) Să se arate că oricare ar fi $m\in\mathbf{R}$, fracţia E are sens oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

II) Să se determine $m\in\mathbf{R}$, astfel încît E să fie negativă, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

30. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+ax+1}{x^2-x+1}$ $(a\in\mathbf{R})$. Să se determine valorile lui a, astfel încît Im $f\subset[-3,2]$.

31. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{3x^2+mx+n}{x^2+1}$. Să se determine m şi n astfel încît Im $f=[-3,5]$.

32. Pentru ce valori ale lui a, între rădăcinile ecuaţiei $x^2-2(a-1)x-2a+1=0$ există relaţia $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}\geqslant\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$?

33. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea care are coeficientul lui x^2 egal cu 1, ştiind că discriminantul şi produsul rădăcinilor sale sînt, respectiv, $\Delta=-2m^2+m+1,\ p=\dfrac{3}{4}(2m^2+m)$.

Să se determine m astfel încît rădăcinile x_1 şi x_2 să verifice inegalitatea $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}>m$.

34. Se dă ecuaţia $mx^2-2(m+1)x+8=0$ şi se cere:

a) Să se discute rădăcinile ecuaţiei după valoarea parametrului m;

b) Să se determine m astfel încît să avem $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}>x_1+x_2$, x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei date.

35. Se dau ecuațiile: $x^2 - (m + 1)x + m^2 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2 și $y^2 - (m + 3)y + 12m + 11 = 0$ cu rădăcinile y_1 și y_2.

Să se determine m astfel ca între rădăcinile ecuațiilor să avem

$$2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \leqslant x_1x_2 + y_1y_2.$$

36. Se consideră ecuația de gradul al doilea

$$(1 + \alpha^2)x^2 - (1 + \alpha)x + \alpha(1 - \alpha) = 0.$$

Să se determine parametrul α pentru care are loc inegalitatea

$$-1 \leqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2} \leqslant 0.$$

37. Se dă ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$ și se cere:

a) pentru ce valori ale lui m o rădăcină este dublă celeilalte?

b) pentru ce valori ale lui m rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației verifică inegalitatea $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1x_2$?

38. Considerăm funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & x < -3, \\ -2x - 5, & x \geqslant -3 \end{cases}$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x + 4, & x > 1. \end{cases}$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

39. Considerăm funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leqslant 0, \\ -5x - 1, & x > 0 \end{cases}$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 0, \\ 3x^2 - 2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

40. Considerăm funcțiile $f, g : (0,1) \to (0,1)$ definite în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x, & \text{dacă } \frac{1}{2} \leqslant x < 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } 0 < x \leqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{4} < x < 1. \end{cases}$$

Să se calculeze $f \circ g$ și $g \circ f$.

41. Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m - 1)x + m - 1, \quad m \neq 0.$$

I) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $x + y = 0$;

II) Ce porțiune din această dreaptă cuprinde vîrful parabolelor cu ramurile în sus (respectiv în jos)?

42. Fie familia de funcții de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 + 2(m - 1)x + m - 1.$$

Pentru ce valori ale lui m parabolele asociate funcțiilor f_m au vîrful deasupra axei Ox?

43. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-2)x + m - 2,$$

unde m este un parametru real.

I) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe o parabolă.

II) Pentru ce valori ale lui m, parabola asociată funcţiei f_m are vîrful sub axa Ox?

44. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, parabola asociată funcţiei de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 2(m-1)x - m$ taie axa Ox în două puncte distincte.

45. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m, \text{ unde } m \in \mathbf{R}.$$

I) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe o parabolă;

II) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m se găsesc sub dreapta $y = +\frac{5}{4}$.

46. Fie funcţia de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1$, $m \neq 0$.

Să se determine m astfel încît vîrful parabolei asociate acestei funcţii să se găsească pe prima bisectoare.

47. Să se determine m astfel încît parabola asociată funcţiei $f(x) = x^2 - 2(m+3)x + m^2$ să taie axa Ox în două puncte.

48. Să se arate că oricare ar fi $m \neq 0$, graficul funcţiei de gradul al doilea $f(x) = mx^2 - 2(m-3)x + m - 6$ taie axa Ox în două puncte distincte.

49. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + 1, \ m \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că există două parabole asociate acestor funcţii care sînt tangente axei Ox. Să se arate apoi că aceste două parabole au vîrfurile simetrice faţă de origine.

50. Să se determine m astfel încît graficele funcţiilor $f(x) = x^2 - 2x - 4$ şi $g(x) = x^2 - 2mx - 6$ să aibă acelaşi vîrf.

51. Să se arate că graficele funcţiilor $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$ şi $g(x) = x^2 + 2x - 1$ au două puncte comune.

52. Fie funcţia de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să notăm cu S aria cuprinsă între axa Ox şi graficul acestei funcţii. Să se arate că $1 < S < 2$.

53. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît graficele funcţiilor $f(x) = x^2 + mx + 1$ şi $g(x) = x^2 + x + m$ să se intersecteze pe axa Ox.

54. Fie p un număr prim. Să se arate că intersecţia graficului funcţiei $f(x) = x^2 - 3x - p$ cu axa Ox, este formată din două puncte care nu au coordonate raţionale.

55. Fie funcţia $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Notăm cu S aria cuprinsă între graficul acestei funcţii şi axa Ox. Să se arate că $10 < S < 16$.

56. Fie funcţia de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - (m + 3)x + 4m$. Pentru ce valori ale lui m graficul lui f_m este situat deasupra dreptei $y = -7$?

57. Fie $m \in \mathbf{Z}$. Să se determine m astfel încît vîrful parabolei funcţiei $f(x) = mx^2 - 2(m + 7)x + m$ să aibă coordonatele numere întregi.

58. Fie funcţia de gradul al doilea

$$f_m(x) = (m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m + 1, \ (m \neq 1).$$

Să se determine m astfel încît graficul funcţiei f_m să fie situat sub axa Ox.

59. Considerăm funcţia $f_m(x) = x^2 - 2(m - 1)x + m(m - 3)$.

I) Pentru ce valori ale lui m vîrful parabolei funcţiei f_m se află sub axa Ox?

II) Pentru ce valori ale lui m, parabola funcţiei f_m este tangentă axei Ox?

III) Să se arate că vîrfurile parabolelor funcţiilor f_m, cînd $m \in \mathbf{R}$, se află pe o dreaptă.

60. Fie funcţia $f(x) = (m + 1)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$.

I) Să se arate că graficul acestei funcţii taie axa Ox în două puncte distincte.

II) Să se determine m astfel încît rădăcinile ecuaţiei

$$(m + 1)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3 = 0 \text{ să fie mai mici decît } 1.$$

61. Pentru ce valori ale lui m, $(m - 1)x^2 + mx + m + 1 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

62. Pentru ce valori ale lui m, $(m - 1)x^2 + 2mx + m + 1 > 0$, oricare ar fi $x > 0$?

63. Pentru ce valori ale lui m, $x^2 - 2mx + m + 1 > 0$, $(\forall)$ $x > 0$?

64. Pentru ce valori ale lui m, $(m - 1)x^2 + 2mx + 1 > 0$, $(\forall)$ $x > 0$?

65. Pentru ce valori ale lui m, $(m + 1)x^2 + 2mx + 1 < 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$?

66. Pentru ce valori ale lui m, $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + m - 2 > 0$, oricare ar fi $x > 0$?

67. Pentru ce valori ale lui m, $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + m - 2 < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$?

68. Pentru ce valori ale lui m, inecuaţia $(m - 1)x^2 + (m + 1)x + m + 1 > 0$ nu are nici o soluţie?

69. Să se determine numerele m şi n astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 - (3m - 4)x - 6(m - 1) = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid (n - 1)x^2 - (n - 1)x + 6(n - 2) = 0\}$$

să aibă două elemente.

70. Să se determine numerele m şi n astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m - 1)x^2 - (3m - 7)x - 6(m - 2) = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid nx^2 + nx + 3(2n - 2) = 0\}$$

să aibă două elemente.

71. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 3x^2 + mx - 22 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (m + 4)x + 14 = 0\} \neq \emptyset,$$

72. Să se determine m astfel încît mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (3m+1)x^2 + (3m+2)x + 2m + 5 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid (2m+5)x^2 + (3m+2)x + 3m + 1 = 0\}$$

să aibă 3 elemente.

73. Să se determine m astfel încît mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx - 4 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x - 2m = 0\}$$

să aibă exact două elemente.

74. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap [1, +\infty) \neq \emptyset.$$

75. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît mulțimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cap [1, +\infty)$ să aibă două elemente.

76. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cap [1, +\infty) = \emptyset.$$

77. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît mulțimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 2 = 0\} \cap (-\infty, -1]$ să aibă două elemente.

78. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m - 1 = 0\} \cap (-\infty, -1] \neq \emptyset.$$

79. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m - 1 = 0\} \cap (-\infty, -1] = \emptyset.$$

80. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $0 < a < b$. Dacă $b < m < \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$, atunci mulțimea $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2m(m-a)x + m^2(m^2 - b^2) = 0\} \cap [0, +\infty)$ are două elemente.

81. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, să se arate că $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)x + b^2c^2 = 0\} \neq \emptyset$.

82. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0\} \cap [2, +\infty)$$

să aibă un singur element.

83. Să se determine m astfel încît mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m^2 - 1)x^2 - (2m-1)x + 1 = 0\} \cap (-\infty, 1]$$

să aibă un singur element.

84. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0\} \cap [-1, 1] \neq \emptyset.$$

85. Să se determine m astfel încît mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m+2)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0\} \cap [-1, 1]$$

să aibă două elemente.

86. Să se determine m astfel încît mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0\} \cap [-1, 1]$$

să aibă un singur element.

87. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (m+1)x^2 - 2(m-1)x - m = 0\} \cap [0, 1] = \varnothing.$$

88. Fie numerele reale a, b, c, a', b', c' astfel încît $a \neq 0, a' \neq 0$ și $ac \geqslant 0$. Dacă $\{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\} \neq \varnothing$ și $\{x \in \mathbf{R} \mid a'x^2 + b'x + c = 0\} \neq \varnothing$ atunci $\{x \in \mathbf{R} \mid aa'x^2 + bb'x + cc' = 0\} \neq \varnothing$.

89. Să se determine m astfel încît mulțimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\} \cap (-\infty, 1]$ să aibă două elemente.

90. Să se determine m astfel încît mulțimea

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0\} \cap (0,3)$ să aibă două elemente.

91. Să se determine m astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\} \cap [0,1] = \varnothing.$$

92. Să se determine m astfel încît mulțimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + 4m + 5 = 0\} \cap [5,7] \neq \varnothing.$$

93. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ 2x^2 + 6xy - 9y^2 = x + 2y; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x^2 + 2y^2 - xy = 7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x^2 + xy + y = -1. \end{cases}$

94. Să se rezolve sistemele omogene:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 7y^2 = 15, \\ -x^2 + 3xy = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 2y^2 = -1, \\ x^2 + 5y^2 = 21; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -5, \\ xy = 12; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 118, \\ x^2 - xy - y^2 = -41; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 = p, \\ x^2y + xy^2 + y^3 = q; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 1; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ h) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{16}; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x + z = -2, \\ xy + xz + yz = 2; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27; \end{cases}$ k) $\begin{cases} xy + xz = -8, \\ xy + yz = 1, \\ yz + xz = -3. \end{cases}$

95. Pentru ce valori ale lui a, sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a, \end{cases}$ are o unică soluție reală?

96. Să se determine numerele reale x, y, z astfel încît $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2xy - z^2 = 1. \end{cases}$

97. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, următoarele sisteme simetrice:

a) $\begin{cases} 2x + xy + 2y = 59, \\ 3x - 2xy + 3y = -34; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 2xy = -11, \\ 2x^2y + 2xy^2 = -12; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 + y^3 = \dfrac{133}{1\,000}, \\ x + y = \dfrac{7}{10}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy + 5(x + y) = 55, \\ 6xy + 3(x + y) = 81; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3(x - y), \\ x^3 + y^3 = x + y; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 3, \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^4 + y^4 = 2; \end{cases}$

h) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + xz + yz = 0, \\ xyz = 0. \end{cases}$

98. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^3y^3z^4 = 1, \\ x^2y^4z^4 = 2, \\ x^2y^3z^5 = 3. \end{cases}$

99. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n}, \\ x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p = b^p. \end{cases}$

100. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} |2x + y| = 3, \\ \left|\dfrac{4x - 1}{2x + y}\right| + \left|\dfrac{2x + y}{3x - 2}\right| = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x - 2| + |y - 1| = 1, \\ |x^2 - 3x + 2| + 4y = 6. \end{cases}$

101. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{x_2x_3 \ldots x_n}{x_1} = a_1, \\ \dfrac{x_1x_3 \ldots x_n}{x_2} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1x_2 \ldots x_{n-1}}{x_n} = a_n. \end{cases}$

102. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încît

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2^2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n^2\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

103. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ numere reale pozitive. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x_1x_2 = a_1, \\ x_2x_3 = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}x_n = a_{n-1}, \\ x_nx_1 = a_n. \end{cases}$

104. Pe o dreaptă (Δ) se consideră $|AB| = a$ şi pe segmentul $|AB|$ punctul M. Triunghiurile echilaterale avînd ca baze date $|AM|$ şi $|MB|$, să se găsească minimul ariei sumei celor două triunghiuri.

105. Fie AD mediana unui triunghi oarecare ABC. Să se determine $M \in |AD|$ astfel încît $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$ să fie minimă.

106. Se dau două surse de lumină A şi B de intensitate respectiv 100 A şi 81 A. Să se determine pe dreapta AB un punct M egal luminat de ambele surse. Distanţa dintre A şi B este egală cu 20 m.

107. Se dă un cerc de rază $R = 10$ m. Pe un diametru $|AB|$ al cercului se alege un punct M şi se construiesc cercurile de diametre $|AM|$ şi $|MB|$. Să se determine poziţia punctului M astfel ca aria cuprinsă între cele două cercuri să fie maximă.

108. Să se determine pe un segment $AB = 20$ cm un punct M astfel ca suma ariilor cercurilor construite pe AM şi BM ca diametri să fie minimă.

109. Să se împrejmuiască un loc în formă de dreptunghi cu un gard a cărui lungime este de 120 m. Cît trebuie să fie laturile acestui dreptunghi astfel încît aria locului să fie maximă?

110. Din bucăţi de materiale triunghiulare o croitoreasă vrea să coasă feţe de masă dreptunghiulare. Cum trebuie croite feţele de masă astfel încît să se piardă cît mai puţin material?

111. Aria unui dreptunghi este egală cu 81 dm². Să se afle dimensiunile astfel încît perimetrul să fie minim.

112. Două maşini pot transporta o cantitate de materiale timp de 5 zile. Prima maşină merge 200 km pe zi şi consumă 12 litri la suta de kilometri. A doua merge 300 km pe zi şi consumă 18 litri la suta de kilometri. Cîte zile trebuie să transporte materiale fiecare maşină astfel încît cantitatea de benzină consumată să fie minimă?

113. Fie triunghiul ABC în care se cunoaşte latura $|AB| = 5$ cm, iar suma laturilor $|BC|$ şi $|AC|$ este egală cu 7 cm. Să se afle înălţimea triunghiului astfel ca aria să fie maximă.

114. Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu acelaşi perimetru, să se găsească acelea care au raza cercului înscris maximă.

Capitolul VI

PUTERI ŞI RADICALI

1. Să se calculeze:

a) $\left[7-5\left(\frac{6}{13}\right)^{0}\right]^{-1}$; b) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-2}$;

c) $\dfrac{3^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{0}-18\cdot 3^{-3}}$; d) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

2. Să se efectueze:

a) $\dfrac{4x^{-2}-9y^{-2}}{a-b}\cdot\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{2x^{-1}+3y^{-1}}$; b) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{x^{-1}+y^{-1}}\cdot\dfrac{x+y}{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{-3}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{-2}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{2}$; d) $[a-(1-a)^{-1}]^{-1}\left[\dfrac{a(a-2)+a^{0}}{a^{2}-a+1}\right]^{-1}$;

e) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{2}(a^{2}-2ab+b^{2})^{-2}$.

3. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\frac{1}{2}-a^{-1}}{4-\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}}:\left[\dfrac{1}{2^{-2}(2+a)}-2a^{-1}-1\right]$ şi să i se afle valoarea pentru $a=-\dfrac{1}{3}$;

b) $\left\{a+\left[1+\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$ şi să i se afle valoarea pentru $a=-\dfrac{1}{4}$.

4. Să se efectueze

$$(x+y+z)^{5}-(-x+y+z)^{5}-(x-y+z)^{5}-(x+y-z)^{5},$$

unde x, y, z sînt numere reale.

5. Dacă $a, b\in\mathbf{R}$, să se demonstreze că

$$(a+b)^{5}-a^{5}-b^{5}=5ab(a+b)(a^{2}+ab+b^{2}).$$

6. Dacă $a, b\in\mathbf{R}$, cu $a+b\neq 0$, să se demonstreze că $a^{3}-b^{3}=$
$=\left(a\,\dfrac{a^{3}-2b^{3}}{a^{3}+b^{3}}\right)^{3}+\left(b\,\dfrac{2a^{3}-b^{3}}{a^{3}+b^{3}}\right)^{3}$.

7. I) Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, să se demonstreze că

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc) =$$
$$= (a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd).$$

II) *Generalizare.* Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 - 3 \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} a_i a_j a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_i a_j \right).$$

8. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ şi notăm $\alpha = a + b + c + d$, $\beta = a + b - c - d$, $\gamma = a - b + c - d$, $\delta = a - b - c + d$. Să se calculeze

$$\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma\delta(\gamma^2 + \delta^2).$$

9. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încît $a + b + c + d = 0$, atunci

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 = 9(bc - ad)(ca - bd)(ab - cd).$$

10. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0 \quad \text{şi} \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3 + a_6^3 = 0.$$

Să se arate că

$$(a_1 + a_3)(a_1 + a_4)(a_1 + a_5)(a_1 + a_6) = (a_2 + a_3)(a_2 + a_4)(a_2 + a_5)(a_2 + a_6).$$

11. Să se afle care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $\left(-\frac{1}{8}\right)^4$ sau $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$; b) $\left(-\frac{6}{7}\right)^4$ sau $\left(\frac{36}{49}\right)^6$; c) $81^{150} \cdot 8^{200}$ sau $3^{600} \cdot 16^{75}$;

d) 3^{65} sau $\left(\frac{1}{3}\right)^{-65}$; e) $81^{-75} \cdot 8^{200}$ sau $3^{-600} \cdot 4^{150}$.

12. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = 3x^2$; b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = x^3 - 2$;
c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = (x - 2)^2$; d) $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_4(x) = (x + 1)^4$;
e) $f_5 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_5(x) = |x + 1|^3$; f) $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_6(x) = |x + 2|^3$.

13. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei putere $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$.

14. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x^{-2} + 1$;
b) $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = x^{-3} + 1$;
c) $f_3 : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = \frac{1}{x - 1}$;
d) $f_4 : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f_4(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$.

15. Să se aducă la o formă mai simplă:

a) $\sqrt{(2 + x)^2}$; b) $\sqrt[4]{(|x| - 3)^4}$;
c) $\sqrt{(-2x^2 + 3x - 1)^2}$; d) $\sqrt[4]{(|x|^2 - 3x + 2)^4}$.

16. Să se efectueze sumele:

a) $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$; b) $\sqrt{(x+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$;

c) $\sqrt{(2x^2-3x+1)^2}+\sqrt{(x^2+x+2)^2}$.

17. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f_1(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$;

b) $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f_2(x)=\sqrt{(x+3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$;

c) $f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f_3(x)=\sqrt{(2x^2-3x+1)^2}+\sqrt{(x^2+x+2)^2}$.

18. Să se găsească valorile lui x pentru care sînt definiţi radicalii sau sumele de radicali:

a) $\sqrt{x-1}$; b) $\sqrt[6]{1-4x}$; c) $\sqrt{-5-3x}$; d) $\sqrt[3]{7x-2}$; e) $\sqrt[3]{x^2-5x+4}$;

f) $\sqrt{(x^2-3x+2)^2}$; g) $\sqrt[4]{x^2-5x+4}$; h) $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-x^5)\,x^8}$;

i) $\sqrt{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$; j) $\sqrt{x-4}-\sqrt{x-5}$; k) $\sqrt[5]{7x^2-3}+$ $+\sqrt[6]{x^2-2}$; l) $\sqrt{4+x}-\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{15-x}$; m) $3\sqrt[3]{1+x}+$ $+\sqrt{|x+2|-7}$.

19. Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $3\sqrt{2}$ sau $\sqrt{27}$; b) $3\sqrt[4]{m^3}$ sau $\sqrt[4]{162\,m^3}$ $(m>0)$; c) $2a\sqrt{a}$ sau $\sqrt{4a^3}$ $(a>0)$; d) $3\sqrt{\frac{3}{8}}$ sau $\sqrt{\frac{3}{2}}$; e) $\sqrt{\frac{4}{75}}$ sau $3\sqrt{\frac{25}{243}}$; f) $-3\sqrt[3]{54}$ sau $-2\sqrt[3]{128}$; g) $2\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$ sau $\sqrt[3]{\frac{8}{375}}$.

20. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

a) $\sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{6},\ \sqrt[12]{280}$; b) $\sqrt{8},\ \sqrt[4]{54}$; $\sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[12]{75}$.

21. Să se determine semnul fiecăruia dintre numerele:

$$\sqrt{2}-\sqrt[3]{3};\ \sqrt[5]{4}-\sqrt[4]{3};\ \sqrt[3]{31}-\sqrt{10};\ \sqrt[4]{63}-2\sqrt{2};\ \sqrt[6]{m}-\sqrt[3]{n},$$

m şi n fiind numere reale pozitive.

22. Să se determine care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ sau $\sqrt{19}-\sqrt{11}$; b) $2\sqrt{8-\sqrt{15}}$ sau $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}$.

23. Să se calculeze:

a) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})\,(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$;

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot$ $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

24. Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}$.

25. Să se scrie numărul $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$ sub forma $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$, cu a și b numere raționale.

26. Fără a utiliza formula radicalilor compuși (a se vedea soluția ex. 85, cap. IV), să se transforme radicalul $\sqrt{9+\sqrt{56}}$ într-o sumă de doi radicali.

27. Dacă a, b, c sînt numere reale, astfel încît $a+b+c=1$, atunci

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 5.$$

28. Să se simplifice:

a) $\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2}$;

b) $\dfrac{x^3-12x+(x^2-4)\sqrt{x^2-16}+16}{x^3-12x+(x^2-4)\sqrt{x^2-16}-16}$;

c) $\dfrac{x^2+2x+2x\sqrt{y}+y+2\sqrt{y}}{x^2-x+x\sqrt{y}-\sqrt{y}}$ $(x, y \in \mathbf{R})$. Discuție.

29. Să se demonstreze că, dacă $a>b>0$ sînt numere reale și $m \in \mathbf{N}$, atunci

$$ma^{m-1} > \frac{a^m-b^m}{a-b} > mb^{m-1}.$$

Să se deducă de aici că

$\sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n+1]{n+2}$, $n \geqslant 2$ fiind un număr natural.

30. Utilizînd formula radicalilor compuși (a se vedea soluția ex. 85, cap. IV) să se aducă la o formă mai simplă radicalii:

a) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; b) $\sqrt{17+\sqrt{288}}$; c) $\sqrt{28-16\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; e) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;

f) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

31. Să se arate că

$$\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+$$
$$+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}} \in \mathbf{Q}.$$

32. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;

d) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

33. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$.

34. Să se demonstreze că

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

35. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}-\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}\in \mathbf{Q}.$$

36. Să se arate că:

a) $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$;

b) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}=3$;

c) $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}=1$.

37. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$;

c) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$; d) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

38. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{3}}$; g) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$; h) $\dfrac{1}{9\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}-27}$

39. Să se raționalizeze numitorul fracției

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}},$$

a, b, c fiind numere raționale.

40. Să se raționalizeze numitorul fracției

$$\frac{1}{a+b\sqrt[3]{k}+c\sqrt[3]{k^2}}$$

unde a, b, c, k sînt numere întregi.

41. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

I) $\frac{1}{a-\sqrt[n]{b}}$; II) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$, a fiind un număr întreg.

42. Să se calculeze

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}},$$

unde $x \in (1, 2)$.

43. Fie $f_1(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$,

$$f_2(x)=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}},$$

unde $x \geqslant \frac{1}{2}$.

a) Să se simplifice $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$;

b) Să se rezolve ecuația $f_1(x)+f_2(x)=2\sqrt{2}$.

44. Să se arate că ecuația

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}=\sqrt[3]{x^2+7}-2$$

are unica soluție $x=-1$.

45. Să se găsească soluțiile reale ale ecuațiilor:

a) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-8-6\sqrt{x-1}}=1$;

b) $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=5$.

46. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x+9}+x+8=0$; b) $\sqrt{24-10x}=3-4x$;

c) $1-\sqrt{13+3x^2}=2x$;

d) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x}}=x-1$; e) $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$;

f) $\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}}=2x-1$; g) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}}=\frac{1}{4}$.

47. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x},$$

a fiind un număr real.

48. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x,$$

unde $a \in \mathbf{R}$. Discuție.

49. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$; b) $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$;

c) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-8x+7}=0$.

50. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{x^2-a}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

unde $a \in \mathbf{R}$.

51. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{4x+c},$$

a, b, c fiind numere reale.

52. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-6+2\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}=$ $=\sqrt{4x+16}$; c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-9+4\sqrt{6}}$.

53. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia

$$\sqrt{x+8a}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+8a+4},$$

a fiind un număr real.

54. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=c,$$

a, b, c fiind numere reale.

55. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$; b) $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-13}=\sqrt{11+\sqrt{72}}$.

56. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{a'x+b'}=\sqrt{ax+c}+\sqrt{a'x+c'},$$

unde a, a', b, b', c, c' sînt numere reale, astfel încît $b+b'=c+c'$.

57. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=a\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}, \text{ unde } a \in \mathbf{R}.$$

58. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b},$$

unde a şi b sînt numere reale, iar n este un număr natural. Discuţie.

59. I) Să se demonstreze că orice soluţie a ecuaţiei

$$\sqrt[3]{E(x)}+\sqrt[3]{F(x)}=\sqrt[3]{G(x)} \tag{1}$$

este o soluţie a ecuaţiei

$$(E(x)+F(x)-G(x))^3+27\,E(x)F(x)G(x)=0. \tag{2}$$

II) Reciproc, să se demonstreze că orice soluţie a ecuaţiei (2) este o soluţie a ecuaţiei (1), mai puţin aceea care dă pentru $E(x), F(x), -G(x)$ valori numerice egale.

60. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{b},$$

unde a, b sînt numere reale. Discuţie.

61. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b} + \sqrt[3]{x+c} = 0,$$

unde a, b, c sînt numere reale. Discuție.

62. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} + 3;$

b) $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(4-x)^2} = \sqrt[3]{(x-2)(4-x)} + 1;$

c) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = 0;$

d) $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$

63. I) Să se demonstreze că orice soluție a ecuației

$$E(x) + F(x)\sqrt[3]{H(x)} + G(x)\sqrt[3]{(H(x))^2} = 0 \qquad (1)$$

este soluție a ecuației

$$(E(x))^3 + (F(x))^3 H(x) + (G(x))^3 (H(x))^2 - 3\,E(x)F(x)G(x)H(x) = 0. \qquad (2)$$

II) Reciproc, să se demonstreze că orice soluție a ecuației (2) este o soluție a ecuației (1), mai puțin aceea care dă pentru $E(x)$, $F(x)\sqrt[3]{H(x)}$, $G(x)\sqrt[3]{(H(x))^2}$ valori numerice egale.

64. Să se rezolve ecuația

$$3x + 1 + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = 0.$$

65. I) Fie a, b, c numere reale nenule și notăm:

$$\alpha = ab + ac - bc, \quad \beta = bc + ba - ca, \quad \gamma = ca + cb - ab.$$

Să se arate că sînt echivalente următoarele două propoziții:

1) $abc \geq 0$ și α, β, γ sînt de același semn;

2) $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0$.

II) Cu notațiile de mai înainte, să se rezolve ecuația

$$x = \sqrt{b-x}\sqrt{c-x} + \sqrt{c-x}\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x}\sqrt{b-x}.$$

Să se arate că pentru ca ecuația să aibă soluție diferită de a, b, c este necesar și suficient ca să fie îndeplinită una din condițiile echivalente precedente.

66. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}},$$

a fiind un număr real.

67. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{x}+3} + \sqrt[3]{13-\sqrt{x}} = 4;$ b) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1;$

c) $\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x-4} = 2;$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+18}}{\sqrt[3]{x+18} - \sqrt[3]{x-1}} = 5.$

68. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x + 1)$;

b) $(x - 2)^2 + 4(x - 2) + \sqrt{x}(4 - \sqrt{x}) = 0$;

c) $(x - 4)^2 + 4x - 27 = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

69. Să se rezolve ecuația

$$3\,\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}} = 10\,\frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}.$$

70. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 3$; b) $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2}$;

c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

d) $\sqrt{x^4 - 18x^2 + 81} - 2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2} + x + 7 = 0$.

71. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b} + \sqrt{x - c} + d = 0,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ și $d > 0$.

72. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{3x - 2}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2}} = \frac{4}{\sqrt{3x^2 + 4x - 4}}$;

c) $\frac{x - 8}{\sqrt{3x - 4}} = \sqrt{2x - 5} - \sqrt{x + 3}$;

d) $\sqrt{2x + 4} - \sqrt{8 - 4x} = \frac{12x - 8}{\sqrt{6x + 20}}$;

e) $\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2x + 6} - \frac{9}{4}} = x + 1$.

73. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x^2 - 7x} + \sqrt{x - 5} + \sqrt[4]{4 - x} = 7$;

b) $\sqrt{x - 6} + \sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[4]{6 - x} = 2$.

74. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} = 1$; b) $\sqrt{x - 2} + \sqrt[3]{4 - x} = 2$;

c) $\sqrt[4]{x - 9} - \sqrt[3]{x + 2} = -1$; d) $\sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{3 - x} = 1$.

75. Să se rezolve ecuația

$$\frac{(39 - x)\sqrt[5]{x - 6} - (x - 6)\sqrt[5]{39 - x}}{\sqrt[5]{39 - x} - \sqrt[5]{x - 6}} = 30.$$

76. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[5]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[5]{x-\sqrt{x^2-1}}=2$;

b) $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}$;

c) $\sqrt[7]{1+\frac{x}{a}}+\sqrt[7]{\frac{a+x}{b}}=\sqrt[7]{\frac{x}{ab}}$;

d) $\frac{2x+1}{2x-1}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{2x-1}}+\frac{2x-1}{2x+1}\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}+1=0$;

e) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{b}$; f) $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$,

a, b, c fiind numere reale.

77. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1}$;

b) $\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x+x^2)^2}=\sqrt[n]{1+x^3}$;

c) $\sqrt[m]{(x+a)^2}+2\sqrt[m]{(a-x)^2}=3\sqrt[m]{a^2-x^2}$;

d) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-2\sqrt{1-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{1-x}$;

e) $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-2\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{1-\sqrt[3]{x^2}}$;

f) $\sqrt[n]{1+\sqrt[p]{x}}-2\sqrt[n]{1-\sqrt[p]{x}}=\sqrt[2n]{1-\sqrt[p]{x^2}}$.

78. Să se rezolve inecuaţia

$$\sqrt{x^2-a^2}>x-\sqrt{2ax-a^2},$$

a fiind un număr real.

79. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$; b) $2\sqrt{x(x+7)}<29-2x$;

c) $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$; d) $\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6}>x-2$.

80. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}>3$; b) $\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}$;

c) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$; d) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$.

81. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\sqrt{x-1}+x-3\geqslant\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$;

b) $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}$;

c) $\sqrt{x+7}-1<\sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}$;

d) $\frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}}<1$; e) $\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1$ (pentru $x\geqslant 2$);

f) $\sqrt{(x+4)(x-3)} < 6x - 3$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$.

82. Să se calculeze:

a) $\dfrac{2^{1/2} + 2 \cdot 5^{-1}}{2^{-1/3} - 2^{-1/6}5^{-1/3} + 5^{-2/3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$;

b) $\dfrac{2^{7/3} - 2^{8/3} \cdot 2^{2/3} + 2\sqrt[3]{3^4}}{2^{5/3} - \sqrt[3]{48} - 2 \cdot 3^{2/3} + 3 \cdot 2^{2/3}} : \sqrt[3]{2}$.

83. Să se efectueze:

I) $\dfrac{2b^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}} + (a-b)^{-1}\left[\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a^{1/2} + b^{1/2}} - \sqrt{ab}\right]$, pentru $a, b > 0$,

II) $\left\{(1-a^2)\left[\dfrac{1-a^{3/2}}{1-a^{1/2}} + a^{1/2}\right]\left[\dfrac{1+a^{3/2}}{1+a^{1/2}} - a^{1/2}\right]^{-1} + 1\right\} : \sqrt{(1-2a+a^2)^{-1}}$,

pentru $a > 1$;

III) $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a} - 2a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab}} + \dfrac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}\right) : \sqrt[3]{a}$, pentru $a, b > 0$, numere reale.

84. Să se efectueze:

I) $\dfrac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d} + \dfrac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d} - a^4c^2\sqrt{\dfrac{3d}{a^4c^2}}$, unde a, b, c, d sînt numere reale pozitive; aceeaşi problemă, dacă a, b, c, d, cu $d \geq 0$, sînt numere reale oarecare;

II) $\dfrac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\dfrac{a^2b^7}{c^2}} : \left(\dfrac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\dfrac{a^4b^7}{cd^5}}\right)$, unde a, b, c, d sînt numere reale pozitive.

85. Să se calculeze:

I) $\dfrac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{(a^2-ab)^{2/3}} : \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt{a^2(a^{3/2}+b^{3/2})}}$, pentru $a = \dfrac{6}{5}$, $b = \dfrac{3}{5}$;

II) $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[8]{a})(1+\sqrt[16]{a})(1-\sqrt[16]{a})$, pentru $a = 2$;

III) $\left[\dfrac{(1-x^2)^{-1/2}+1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right]^{-1/2} + \left[\dfrac{(1-x^2)^{-1/2}-1}{(1-x^2)^{-1/2}+1}\right]^{-1/2}$

pentru $x = 2a^{1/2}(1+a)^{-1}$, $a > 1$;

IV) $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, pentru $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, unde $a, b > 0$.

Aceeaşi problemă pentru cazul în care $a, b < 0$.

86. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă şi adaos, cu eroarea indicată, pentru numerele:

a) $\sqrt[3]{72351}$ cu o eroare mai mică decît 1;

b) $\sqrt{2,5}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-1};

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-3}.

87. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1};$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

88. Dacă $s=\dfrac{1}{\sqrt{10\,000}}+\dfrac{1}{\sqrt{10\,001}}+\dfrac{1}{\sqrt{10\,002}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$,
să se arate că $|s-1800|<0,02$.

89. I) Dacă n este un număr natural, să se demonstreze că

$$\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right]<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right];$$

II) Să se găsească partea întreagă a numărului

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}.$$

90. Să se determine toate valorile posibile ale expresiei

$$\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1},$$

pentru $a\in\mathbb{R}$.

91. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=1,\\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y},\\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt[3]{x-y+8};\end{cases}$

c) $\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}\right)^{1/2}+\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}\right)^{-1/2}=2,\\ xy=1;\end{cases}$

d) $\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4},\\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4x}=52;\end{cases}$

e) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2,\\ x^2-4xy+6x=8;\end{cases}$

f) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=5,\\ x+20y=23.\end{cases}$

Capitolul VII

NUMERE COMPLEXE

1. Să se găsească numerele reale x şi y dacă:

a) $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$; b) $(2+i)x-(2-i)y=x-y+2i$;
c) $(4-3i)x^2+(3+2i)xy=4y^2-\frac{1}{2}x^2+(3xy-2y^2)i$; d) $\frac{x-3}{3+i}+\frac{y-3}{3-i}=i$; e) $3\sqrt{x^2-2y}+(1-i)x^2=2(1+2i)y+4-19i$;
f) $(x-a)(x+a-2+2i)+(y-b)(y+b-i)=0$.

2. Să se calculeze:

a) $(2-i)^2$; $(2+i)^2$; $(2-i)^3$; $(2+i)^3$; b) $(2-4i)(5+2i)$; $(4+5i)(1-2i)$; $(3-\sqrt{2}\,i)^2(3+\sqrt{2}\,i)$; c) $\frac{i-6}{2+5i}$; $\frac{1+i}{3-i}+\frac{3-i}{1+i}$; $\frac{i-6}{2+5i}+\frac{2-i}{2+i}$; $\frac{3+7i}{2+3i}+\frac{5-8i}{2-3i}$; d) $\frac{(1+i)^2}{1-i}+\frac{(1-i)^3}{(1+i)^2}$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32}$.

3. Să se arate că $1+3i$ şi $1-3i$ sînt soluţii ale ecuaţiei

$$x^3-x^2+8x+10=0.$$

4. Să se arate că numerele complexe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sînt soluţii ale ecuaţiei $x^4+x^2+1=0$.

5. Dacă ε este oricare dintre numerele $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze:

a) $\varepsilon^2+\varepsilon+1$, ε^n, unde $n\in\mathbf{N}$; b) $\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}+\frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$; $\frac{\varepsilon^3-1}{1-\varepsilon^2}$;
c) $(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)$; $(a\varepsilon+b\varepsilon^2)(a\varepsilon^2+b\varepsilon)$, unde $a, b\in\mathbf{R}$.
d) $(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$, unde $a, b, c\in\mathbf{R}$.

6. Să se verifice egalităţile:

a) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=2$; b) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5=-1$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^6+\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^6=-2$.

7. Fie numerele complexe

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} \quad \text{şi} \quad z_2=\frac{i}{-2\sqrt{2}+2i}.$$

Să se calculeze:

$$z_1 + z_2,\ z_1z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ z_1^2 + z_2^2,\ z_1^3 + z_2^3,\ z_1^4 + z_2^4,\ z_2^5z_1^{-3}.$$

8. Să se determine numerele complexe z, astfel încît numărul $(z - 1)\cdot(\bar{z} + i)$ să fie real.

9. Să se aducă la forma algebrică simplă, numerele:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; b) $\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^2 - \left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)^2$; c) $\frac{(a+i)^3 - (a-i)^3}{(a+i)^2 - (a-i)^2}$.

10. Să se calculeze:

a) $(1+i)^{200}$; b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$; c) $\left(\frac{5-17i}{11-6i}\right)^n + \left(\frac{5+13i}{9+4i}\right)^n$;

d) $\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7-6i}\right)^n$, unde $n \in \mathbf{N}$.

11. Dacă α și β sînt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze: a) $\alpha^{1980} + \beta^{1980}$; b) $\alpha^{1981} + \beta^{1981}$; c) $\alpha^{1982} + \beta^{1982}$; d) $(1+\alpha)^{1980} + (1+\beta)^{1980}$.

12. Dacă α, β sînt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze. a) $\alpha^n + \beta^n$, b) $(1+\alpha)^n + (1+\alpha^2)^n + (\alpha+\alpha^2)^n$; c) $(1+\beta)^n + (1+\beta^2)^n + (\beta+\beta^2)^n$, unde n este un număr natural.

13. Să se calculeze

$$s_1 = \sum_{k=0}^{n} i^k,\ s_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k i^k,$$ unde n este un număr natural.

14. Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, avem

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbf{R}.$$

15. Să se calculeze $|z|$ dacă

$$z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4.$$

16. Să se determine, în fiecare caz în parte, numărul complex z astfel încît:

a) $\left|\frac{z-12}{zi+8}\right| = \frac{5}{3}$ și $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$; b) $|z| = |1-z| = |\bar{z}^2|$; c) $|z-i| = |z-1| = |z+iz|$.

17. Fie $z, z' \in \mathbf{C}$ astfel încît $|z| = |z'| = 1$. Să se arate că $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbf{R}$.

18. Fie $\lambda \in \mathbf{R}$. Să se arate că modulul numărului $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ este 1. Reciproc, să se arate că orice număr complex de modul 1 poate fi scris în mod unic sub forma precedentă.

19. Să se reprezinte în planul complex numerele:

a) $z_1 = (z+3i)(3-5i)$; b) $z_2 = \frac{3+2i}{1+3i}$.

20. Să se determine punctele din planul complex, care au ca afix numerele complexe z, pentru care:

a) $|z+i| \leq 2$; b) $|z-2i| > 3$; c) $|z| \leq 2$; d) $1 < |2z+3-2i| < 3$; e) $|i-z| > 4$; f) $|z-2| - |z+2| < 2$; g) $|z+1| < |1-z|$.

21. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3 - 1 = 0$; b) $x^3 + 8 = 0$; c) $64x^3 + 1 = 0$; d) $64x^3 - 27 = 0$; e) $x^4 + 16 = 0$; f) $x^4 - 81 = 0$; g) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$; h) $x^6 - 27x^3 + 27 = 0$.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{C}$ are loc egalitatea:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Să se dea o interpretare în planul complex acestei relații.

23. Fie $z, z' \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze că:

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Mai mult, să se arate că are loc egalitatea dacă și numai dacă există un număr real pozitiv λ astfel încît $z' = \lambda z$.

24. Să se arate că dacă $z \in \mathbf{C}$, cu $|z| < \frac{1}{3}$, atunci

$$|(\sqrt{2} - \mathrm{i})z^3 - \mathrm{i}z| < \frac{3}{4}.$$

25. a) Fie $m \in \mathbf{Q}$. Să se arate că, dacă $z = (4m^2 - 1) + 4m\mathrm{i}$ atunci $|z| \in \mathbf{Q}$.

b) Să se determine toate numerele complexe $z = a + b\mathrm{i}$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$, al căror modul să fie număr întreg.

26. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că numărul

$$z = (\sqrt[4]{a} + \mathrm{i}\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \mathrm{i}^2\sqrt[4]{b}) \ldots (\sqrt[4]{a} + \mathrm{i}^{4k}\sqrt[4]{b})$$

este real.

Dacă P este planul complex, să se determine următoarele mulțimi:

27. $A = \{(x, y) \in P \mid |z - 2\mathrm{i}| = 6$, unde $z = x + \mathrm{i}y\}$.

28. $B = \left\{(x, y) \in P \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z - 2}{z - 6}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z - 2}{z - 6}\right)\right.$, unde $z = x + \mathrm{i}y\}$.

29. $C = \left\{(x, y) \in P \;\middle|\; \frac{1 + \bar{z}}{z} \in \mathbf{R}\right.$, unde $z = x + \mathrm{i}y\}$.

30. $D = \left\{(x, y) \in P \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z - 2}{z - 1}\right) = 0\right.$, unde $z = x + \mathrm{i}y\}$.

31. $E = \left\{(x, y) \in P \;\middle|\; \mathrm{Im}\left(\frac{z - 2}{z - 4\mathrm{i}}\right) = 0\right.$, unde $z = x + \mathrm{i}y\}$.

32. Să se arate că dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale și distincte, atunci ecuația $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0$ are rădăcini complexe.

33. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuația $(2a + 1)x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ să aibă rădăcini complexe.

34. Să se descompună în produs de polinoame de gradul întîi polinoamele: $x^4 + x, x^3 - 1, x^4 + 16$.

35. Să se determine numerele complexe z, astfel încît

a) $|z| - 2z = 3 - 4\mathrm{i}$; b) $|z| + z = 3 + 4\mathrm{i}$.

36. Fie $u \in \mathbf{R}$, $u \neq 1$. Să se găsească condiții în care produsul

$$(1 + u\mathrm{i})(1 + u\mathrm{i}^2)(1 + u\mathrm{i}^3) \ldots (1 + u\mathrm{i}^n),\ n \in \mathbf{N}.$$

să fie:

a) real; b) imaginar.

37. Fie numărul $\alpha = (u + iv)^n + (v + iu)^n$, unde $u, v \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$. Să se determine n astfel încît numărul α să fie:

a) real; b) imaginar.

38. Să se găsească relaţia dintre x şi y astfel încît numărul $(x + iy^2)^3$, să fie:

a) real; b) imaginar.

39. Să se găsească condiţia în care numărul $(x + iy)^3$ este:

a) un număr real mai mare decît 64;

b) un număr imaginar cu modulul mai mare decît 64.

40. Fie $u, v \in \mathbf{C}$ astfel încît

$$|u| < 1 \text{ şi } |v| = 1 \text{ şi fie } w = v\frac{z - u}{1 - \bar{u}z}.$$

Să se arate că $|w| \leqslant 1$ dacă şi numai dacă $|z| \leqslant 1$.

41. Fie $a \in \mathbf{R}$ şi $z \in \mathbf{C}$, astfel încît $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare posibilă a lui $|z|$.

42. Să se determine numerele complexe z astfel încît

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0.$$

43. Să se determine mulţimea punctelor din plan de afix z astfel încît imaginile în plan ale numerelor z, z^2, z^3 să fie vîrfurile unui triunghi dreptunghic.

44. Fie $a \in \mathbf{C}$ şi $z = \frac{a + i}{a - 1 + 2i}$. Să se determine mulţimea punctelor A din planul complex de afix a, astfel încît z să fie real.

45. Fie funcţia $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$, definită prin

$$f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z - 1}.$$

Să se determine mulţimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $f(z) \in \mathbf{R}$.

46. Fie funcţia $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$, definită prin

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Să se determine:

a) Mulţimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\operatorname{Im} f(z) = 0$.

b) Mulţimea B a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu $\operatorname{Re} f(z) = 0$.

47. Să se rezolve ecuaţiile în z:

a) $2z + 6i = \frac{1}{2i}z + 5i - 7$; b) $(1 + 3i)z + \frac{1 - i}{1 + i} = (3 - 2i)z + 5$;

c) $(\sqrt{3} + i)\bar{z} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{21}{4}iz + 3$; d) $(5 + 3i)\bar{z} + \frac{2}{1 - i} = (\varepsilon + \varepsilon^2)^2$,

unde $\varepsilon = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

48. Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$ astfel încît $z^2 = a + bi$.

Aplicație, pentru numerele: $1 - i$, $1 + i$, $5 - 12i$, $5 + 12i$, $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i\sqrt{3}$.

49. Să se arate că pentru ecuația de gradul al doilea $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, cu coeficienți complecşi, rădăcinile sînt date de aceeaşi formulă ca şi în cazul ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali.

50. Să se rezolve ecuațiile în z:

a) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$; b) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$; c) $z^2 - 2z - 7 - 6i = 0$; d) $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 5 = 0$; e) $z^2 - (5 + 2i)z + 3(3 + i) = 0$.

51. Să se rezolve ecuațiile în z:

a) $iz^2 - 2(1 + i)z + 3(2 + i) = 0$; b) $(1 + i)z^2 - (5 + 2i)z + 5 = 0$; c) $(4 + 3i)z^2 + 2(2 - i)z + 2 - i = 0$; d) $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$.

52. Să se rezolve ecuațiile în z:

a) $z^2 - 2(1 + i\alpha^2)z + 1 - \alpha^4 = 0$;

b) $z^2 - 2z + 1 + \alpha^2 = 0$,

α fiind un parametru real.

53. Să se rezolve ecuația $\bar{z} = z^3$.

54. Să se simplifice fracțiile:

a) $\dfrac{X^2 - \sqrt{2}X + 1}{X^4 + 1}$; b) $\dfrac{X^2 - iX - (1 + i)}{X^2 - 2X + 2}$; c) $\dfrac{X^3 - 3X^2 + 7X - 5}{X^3 - 5X^2 - 9X - 5}$;

d) $\dfrac{X^2 - 2aX + a^2 + b^2}{iX^2 - iaX + b(a + bi)}$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

55. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^6 - y^3 = 98, \\ x^4 + x^2y + y^2 = 49; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^5 + y^6 = -16, \\ x^2 + y^2 = -4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^4 = -19, \\ xy^2 = -6. \end{cases}$

56. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} (1 + 3i)x - 2(1 - 2i)y + 2(3 - i) = 0, \\ 2(2 + i)x - (2 + 3i)y - (5 + 4i) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2 + 3i)x + (2 - 3i)y = 7, \\ (1 + i)x + (1 - i)y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + (3 - 2i)y = -1 + i, \\ (3 + 2)x + 3y = 2 + i. \end{cases}$

Capitolul VIII

FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. Fie a un număr real pozitiv. Să se decidă care dintre perechile de numere următoare este mai mare:

a) $a^{1+\sqrt{6}}$ și $a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ și $a^{\sqrt{3}-2}$.

2. Să se găsească valorile lui x, pentru care sînt definiți radicalii:

a) $\sqrt{(0,2)^x-25}$; b) $\sqrt[4]{5^x-0{,}04}$; c) $\sqrt[3]{3^{-4x}-\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{a^x-a^{-x}}$, a fiind un număr real pozitiv.

3. Fie funcțiile:

a) $f_1:[-1, 1]\to\mathbf{R}$, $f_1(x)=3^{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $f_2:(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)\to\mathbf{R}$, $f_2(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$

c) $f_3:[3, +\infty)\to\mathbf{R}$, $f_3(x)=\sqrt{3^x-27}$;

d) $f_4:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_4(x)=\dfrac{1}{3^{|x|}}$;

e) $f_5:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_5(x)=2^{2x}-2^{x+3}+18$.

Să se determine imaginea fiecărei funcții.

4. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care sînt adevărate inegalitățile:

a) $5^{(x-3)^2-|x-3|-2}<1$; b) $(2\sqrt{2})^{x+3}>\left(\frac{1}{8}\right)^{|x-4|}$ c) $\dfrac{2^x-4}{3x^2-8x+5}>0$;

d) $|x|^{x^2-x-2}<1$.

5. Să se traseze graficele funcțiilor:

a) $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_1(x)=3^{|x|}$;

b) $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_2(x)=3^x+3^{-x}$;

c) $f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_3(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3}$.

6. Să se găsească valorile lui x, pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_a|x|$; b) $\log_a(5-x^2)$; c) $\log_a(x^4-5x^2+4)$; d) $\log_a\sqrt[3]{x^2-x-6}$;

e) $\log_a(\log_a x)$; f) $\log_a(\log_b x)$,

unde a și b sînt numere reale pozitive, diferite de 1.

7. Fie a și b numere reale pozitive, diferite de 1. Să se decidă care dintre numerele $\log_a b$ și $\log_b a$ este mai mare.

8. Să se determine valorile lui x, pentru care au loc inegalitățile:

a) $\log_a x \leqslant 3\log_a x$; b) $\log_x|x| \geqslant 3\log_a|x|$.

9. Pornind de la graficul funcției logaritmice să se traseze graficele următoarelor funcții:

a) $f_1 : (1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \log_3(x-1)$;

b) $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = |\log_3 x|$;

c) $f_3 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = \log_3 |x|$;

d) $f_4 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_4(x) = \log_3 x^2$;

e) $f_5 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_5(x) = \log_3 \sqrt{x}$;

f) $f_6 : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_6(x) = \log_3 \dfrac{x}{3}$.

10. Să se determine x astfel încît să avem

a) $\log_a x = \dfrac{2}{3}\left[\log_a m + \dfrac{3}{4}\log_a(m+n) - 2\log_a(m-n)\right] - \dfrac{1}{2}\log_a n$;

b) $\log_a x = -\dfrac{1}{3}\log_a u + \dfrac{1}{4}\left[\log_a v - \dfrac{2}{3}\log_a u + \dfrac{2}{3}\log_a(u+v) - \right.$
$\left. - \dfrac{1}{2}\log_a(u-v)\right]$.

11. Să se demonstreze că, dacă $2\log_b x = \log_a x + \log_c x$, atunci $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

12. Să se calculeze $\log_6 16$ în funcție de $a = \log_{12} 27$.

13. Dacă $a = \log_{30} 3$ și $b = \log_{30} 5$, să se calculeze în funcție de a și b numărul $\log_{30} 16$.

14. Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci $\log_a \dfrac{2ab}{a+b} + \log_b \dfrac{2ab}{a+b} \geqslant 2$.

15. Să se demonstreze că:

$$\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x} + \dfrac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a_n} x}}$$

16. Să se demonstreze că

$$\log_a n \log_b n + \log_b n \log_c n + \log_c n \log_a n = \frac{\log_a n \log_b n \log_c n}{\log_{abc} n}.$$

17. Dacă $2\log_a(x-2y) = \log_a x + \log_a y$, să se calculeze $\dfrac{x}{y}$.

18. Dacă $\log_{60} 3 = m$ și $\log_{60} 5 = n$, să se calculeze în funcție de m și n, numărul $\log_5 4 + \log_{12} 2$.

19. Să se demonstreze că numerele: $\log_2 3$, $\log_5 10$, $\log_{1/2} 5$ sînt iraționale.

20. Fie a și b numere raționale pozitive, diferite de 1. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca $\log_a b$ să fie un număr rațional.

21. Să se demonstreze că dacă numerele reale a și b sînt astfel încît $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, atunci are loc inegalitatea

$$\log_2(a+b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

22. Fie funcția $f:[1, 64] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \log_2\left(\frac{8}{x}\right).$$

Să se determine valoarea lui x, pentru care f să aibă valoarea maximă.

23. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geqslant n.$$

24. Să se demonstreze că

$$\log_{a_3} \sqrt[n]{a_1 a_2} + \log_{a_4} \sqrt[n]{a_2 a_3} + \dots + \log_{a_1} \sqrt[n]{a_{n-1} a_n} + \log_{a_2} \sqrt[n]{a_n a_1} \geqslant 2.$$

25. Să se decidă care dintre numerele $\log_2 3$ și $\log_3 4$ este mai mare.

26. Dacă $\log_{bc} a = x$, $\log_{ca} b = y$ și $\log_{ab} c = z$, să se arate că

$$a^{(x+1)(y-z)} b^{(y+1)(z-x)} c^{(z+1)(x-y)} = 1.$$

27. Să se demonstreze că

$$\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geqslant \frac{3}{2},$$

unde $x, y, z \in (0, 1)$ sau $x, y, z \in (1, +\infty)$.

28. Să se arate că

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5.$$

29. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left(\frac{5}{22}\right)^{2x-3} = (4, 4)^{3x-2}$; b) $(a^{x^2+x-2})^{3-x} = 1$ $(a > 0)$;

c) $8\sqrt{(0,25)^{5-x/2}} = 2^{\sqrt{x-1}}$; d) $16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512 \cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}$;

e) $2^{1-x^2} \cdot 2^{2x} = 64^{-1}$; f) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{(\sqrt[4]{3})^{3x-4}}$;

g) $4^{|x^2-3x+2|} = 16^{x+1}$; h) $27 \cdot 3^{|x-2|} \cdot 9^{1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

30. Să se rezolve ecuațiile:
a) $3^{x+1} + 3^x = 108$; b) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} + 32 = 0$; c) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28$; d) $5^{2x+1} - 5^{2x-1} = 120$.

31. Să se rezolve ecuațiile:
a) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155$; b) $2 \cdot 7^{2x+2} + 7^{2x-1} = 687$; c) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 1$; d) $3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-4} = 315$; e) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} = 896$; f) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 30$.

32. Să se rezolve ecuațiile:
a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6^x + 6^{x+1}$; b) $3^{x+1} + 5^{x+2} = 3^{x+5} - 3 \cdot 5^{x+3}$; c) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x-1}$; d) $7^{2x-1} + 7^{2x} + 7^{2x+1} = 5^{2x-1} + 5^{2x} + 5^{2x+1}$.

33. Să se rezolve ecuațiile:
a) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$; b) $2^x + 4^x = 272$; c) $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$; d) $64^{1/x} - 2^{3+3/x} + 12 = 0$; e) $3 \cdot 3^{x+2} + 9 = \sqrt{81^{2x-1}} + 3^{4x}$.

34. Să se rezolve ecuațiile:
a) $3^{4\sqrt{x}} + 2 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3 = 0$; b) $25^{\sqrt{x-3}} - 5 \cdot 5^{\sqrt{x-3}} - 500 = 0$;
c) $3^{2\sqrt[4]{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} + 3 = 0$.

35. Să se rezolve ecuațiile:
a) $1 + \dfrac{16}{3^x - 1} = \dfrac{1}{3^{x-3}}$; b) $a^{x-2} + a^{2-x} = 2 \quad (a > 0)$;
c) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$; d) $\sqrt{3^x} + \sqrt{3^{-x}} = 10$.

36. Să se rezolve ecuațiile:
a) $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$; b) $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 98$;
c) $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 2$.

37. Să se rezolve ecuațiile:
a) $2^{2x} - 13 \cdot 6^{x-1} + 9^x = 0$; b) $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0$;
c) $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x - 3 \cdot 9^x = 0$; d) $2^{2x+2} \cdot 10^{x+1} - 10 \cdot 2^{3x}5^x = 1\,200$;
e) $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

38. Să se rezolve ecuațiile:
a) $9^{\sqrt{x^2+3}} - 3^{1+\sqrt{x^2+3}} = 54$; b) $5^{\sqrt{x-3}} + 7^{\sqrt{x^2-8x+15}} = 2$.

39. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\frac{2^x + a \cdot 3^x}{2^x - a \cdot 3^x} = 2 \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

Să se afle valorile lui a pentru care ecuația are o soluție întreagă.

40. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$3^x + 4^x = y^2$$

în mulțimea numerelor întregi.

41. Să se rezolve ecuațiile:
a) $x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$; b) $3^x + 4^x = 5^x$;
c) $(x + 4)3^{1-x-1} - x = (x + 1)\,|\,3^x - 1\,| + 3^{x+1} + 1$;
d) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = 2^{\sqrt{x-3}}$; e) $(2 + a)^{\sqrt{x-4}} + (2 - a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 2$, unde $|a| \leqslant 1$.

42. Să se determine valorile reale ale lui x, astfel încît să fie satisfăcute inecuațiile:
a) $|x|^{2x^2-3x+1} \leqslant 1$; b) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{3^x + 1}{9^x + 3} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

43. Fie funcția $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x \cdot 3^{1-x} + 2^{1-x} \cdot 3^x$.

Să se arate că f este descrescătoare pe $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ și crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

44. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_x(3x^2 - 5x) = 1$; b) $\log_{x+1}(3x^2 + 2x - 3) = 2$; c) $\log_{x^2-1} 27 = 3$;
d) $\log_{\sqrt{x-1}}(2x^2 + 2x + 5) = 4$; e) $\log_{\sqrt{x^2+2}}(2x^4 + x^2 + 6) = 4$;
f) $\log_{\sqrt{x}}(x + |x - 2|) = \log_x(5x - 6 + 5|x - 2|)$.

45. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_a\log_a\log_a x = 0$; b) $\log_a\log_{a^2}\log_{a^3} x = 0$; c) $\log_a\log_b\log_c x = 0$;
d) $\lg(x + 6) - 2 = \frac{1}{2}\lg(2x - 3) - \lg 25$; e) $\log_{x^2}\log_{2x^2} = \log_{4x^2}$;
f) $\log_a(a\log_b(b\log_c x) = 1$.

46. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{\log_a(x - 3)}{\log_a(x^2 - 3)} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{\log_{x+2}\sqrt[3]{x^2 + 2}}{\log_{x+2}(2x - 1)} = \frac{1}{3}$;
c) $(\sqrt[3]{x})^{\log_x x^2+2} = 2\log_3 27$; d) $\frac{1}{2}\lg\sqrt{x^3 - 3a^4} = \lg x + \lg\frac{a}{x}$;
e) $\lg\sqrt{1 + x} + 3\lg\sqrt{1 - x} = \lg\sqrt{1 - x^2} - 2$;
f) $\log_{x^2-6x+8}[\log_{2x^2-2x+3}(x^2 + 2x)] = 0$.

47. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_{15}\frac{1}{3^x + x - 5} = x(\log_{15} 5 - 1)$; b) $\lg(6\cdot 5^x - 25\cdot 20^x) = x + \lg 25$;
c) $\lg(x^2 - 3x - 4) - x = \lg(x + 1) - 5$; d) $\lg(10^{2x-1} + 7\cdot 10^{x-1}) = \lg(10^{x+1} - 2) - 1$;
e) $(x - 1)(1 - \log_6 3) = \log_6(2^{x-1} + x - 2)$; f) $\log_x(2\cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$;
g) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

48. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\lg^2 x - 4\lg x + 3 = 0$; b) $\frac{1}{4}\lg^4 x - 3\lg^2 x + 8 = 0$;
c) $4\lg^4 x - 5\lg^2(x^2) + 16 = 0$; d) $(4\lg^2(x + 1) - 1)(\lg^2(x + 1)^2 + 1) = 15$;
e) $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$;
f) $\log_x\sqrt[3]{4} + 3\log_x(x\sqrt[3]{2}) + \log_x^2\sqrt[3]{4} = 12$.

49. Să se rezolve ecuația

$$\log_a^m x^n - \log_a^n x^m = 0,$$

unde m și n sînt numere naturale.

50. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^x = x$; b) $x^{\log_3 x + 4} = 243$; c) $(\sqrt[4]{x})^{\lg x + 7} = 10^{\lg x + 1}$; d) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$;
e) $7^{\log_{25}^2(5x) - 1} - x^{\log_5 7} = 0$; f) $x^{\log_2 x} + 5x^{-\log_2 x} = 6$;
g) $|x - 1|^{\log_3 x^2 - 2\log_x 9} = (x - 1)^2$; h) $6^{\log_{\sqrt{3}} x} - 7\cdot 6^{\log_3 x} + 6 = 0$.

51. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_2 x + \log_3 x = 1$; b) $\log_3 x + \log_5 x = \log_{10}\frac{3}{2} + 1$;
c) $\log_{a^2} x + \log_a x^2 = 1$; d) $\log_2^2(x - 2)^2 - \log_{1/2}(x - 2) = 5$;
e) $\log_5 2 + \log_{25} x = \log_{1/5}\sqrt{8}$; f) $\log_{x+2} x + \log_x(x + 2) = \frac{5}{2}$.

52. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\log_a x}{\log_b x \log_c x} = \frac{\log_a b}{1 + \log_c a}.$$

53. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x + 2^x + \log_2 x = 7$; b) $2^x + \log_2 x + 3^{x/2} + \log_3 \frac{x}{2} = 8$.

54. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a$;

b) $\log_a x + (a + \log_a x) \log_{\sqrt{x}} a = 2a \log_x a$;

c) $6 \log_x a + 3 \log_{a^2 x} a - \frac{14 \log_{ax} a}{\log_a x} = 0$.

55. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 3^{x+y} = 243, \\ 2^{3y-x} = 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 15, \\ \sqrt{2^x} - 3^y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^{y^2-3y+3} = x, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250, \\ 2^y \cdot 5^x = 40; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^{2y-1} = 5, \\ x^{y+2} = 3; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y, \end{cases}$ $\begin{pmatrix} a > 0, & a \neq 1 \\ b > 0, & b \neq 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = b, \\ a^{x+y} = c; \end{cases}$ $(a, b, c > 0)$

i) $\begin{cases} x^{y-2} + x^{2-y} = \frac{5}{2}, \\ x^y + x^{-y} = \frac{65}{8}; \end{cases}$ j) $\begin{cases} 3^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{y-2}} = 36, \\ 9^{\sqrt[3]{x}}\, x + 4^{\sqrt[4]{y-2}} = 97; \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^{x^2-y^2+8x+1} = 1, \\ 2^y = 8 \cdot 2^x; \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^m = y^n, \end{cases}$ $(m \neq n)$; m) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y + 2^z = 124, \\ 3^y \cdot 2^z + 2^x = 436, \\ 2^z \cdot 2^x + 3^y = 91. \end{cases}$

56. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3, \\ x^2 + 16y^2 = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x - 21 \lg y = 1, \\ x^2 y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 + y = 12; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2(y - x) = \log_4(y - 2xy), \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = 0, \\ 2 \log_2 x + \log_2 y = 3; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3^x 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^a = y^b, \\ \log_c \frac{x}{y} = \log_y x, \end{cases}$ $(a, b, c > 0, c \neq 1)$;

h) $\begin{cases} |x|^{\lg y} = 4, \\ xy = 40; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 5^{\lg x} - 3^{\lg y} = 0, \\ (3x)^{\lg 3} - (5y)^{\lg 5} = 0; \end{cases}$ j) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x - y \log_x y = (x + y) \log_x y; \end{cases}$

k) $\begin{cases} \log_m x + \log_n y = a, \\ \log_n x + \log_m y = b; \end{cases}$ l) $\begin{cases} \log_x y + \log_{zx} y^2 = 4, \\ \log_y x + \log_{3y} x^2 = \dfrac{7}{6}; \end{cases}$

m) $\begin{cases} (\log_a x)^2 + (\log_a y)^2 = 2m, \\ x^{\log_a x} + y^{\log_a y} = 2 \cdot \dfrac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2} a^m, \end{cases}$ $(p \neq q)$; n) $\begin{cases} (xy)^{\lg z} + (xz)^{\lg y} = a, \\ (yz)^{\lg x} + (yx)^{\lg z} = b, \\ (zx)^{\lg y} + (zy)^{\lg x} = c. \end{cases}$

57. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\log_{1/2}(x^2 + 2x) > 0$; b) $\log_a(6x^2 + 5x + 1) < 0$;

c) $\log_x \dfrac{4x + 5}{6 - 5x} < 1$; d) $\log_a(3x^2 - 5x - 3) < \log_a(4x - 3)$;

e) $x \log_a 4 < \log_a(2^x + 6)$; f) $\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2 \log_9 7$;

g) $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x - 5}{|x - 2|}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$; h) $\log_{\frac{x^2 - 10x + 31}{30}}\left(5x - \dfrac{11}{20}\right) \leqslant 0$;

i) $\log_9^2 x \geqslant \log_3^2 \sqrt{1 - \dfrac{x}{4}}$; j) $\log_3(3^x - 3) \cdot \log_{1/3}(3^{x+1} - 9) < -6$;

k) $\log_2 \log_{1/2}(x^2 - 3x + 2) \leqslant 1$; l) $\log_2\left(\left|\dfrac{x - 1}{x - 5}\right| + 7\right) > 3$;

m) $\log_x(x + 2) > \log_{x+2} x$; n) $\dfrac{\ln(2x^2 - 3x + 1)}{x^2 - 3x} \geqslant 0$.

58. Să se determine valorile lui x, pentru care sînt definiţi radicalii următori:

a) $\sqrt{|\ln^3 x + \ln x + |\ln x|| - |\ln^3 x - \ln x + |\ln x||}$; b) $\sqrt{\log_a x + \log_{ax} x}$.

59. Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care inegalitatea

$$\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2 + 3) \geqslant 1$$

este adevărată pentru orice x real.

60. Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care inegalitatea

$$\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2 + 2|a|) > 0$$

este adevărată pentru orice x real.

61. Să se determine toate numerele reale m, astfel încît inegalitatea

$$m \cdot 4^x + 4(m - 1) \cdot 2^x + m > 1$$

să fie adevărată pentru orice x real.

62. Să se determine toate numerele reale m, astfel încît inegalitatea

$$(m + 1)e^{-2x} + m(e^{-x} + 1) > 0$$

să fie adevărată pentru orice x real.

63. Fie a, b, c numere reale distincte şi presupunem că α, β, γ sînt numere reale astfel încît pentru orice număr real x,

$$\alpha e^{ax} + \beta e^{bx} + \gamma e^{cx} = 0.$$

Să se arate că $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Capitolul IX

INDUCȚIA MATEMATICĂ

1. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n > 1$, sînt adevărate propozițiile:

a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

c) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

d) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, unde $x \neq 1$.

2. Să se calculeze sumele următoare și apoi să se demonstreze, prin inducție matematică, că formulele găsite sînt adevărate pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$;

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$.

3. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, este adevărată egalitatea

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k + 2 \cdot 3 \dots k(k+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+k-1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+k)}{k+1}$$, unde $k \geq 2$ este un număr natural.

4. Să se calculeze sumele următoare și apoi, să se demonstreze prin inducție matematică formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

5. Să se calculeze sumele următoare și apoi să se demonstreze, prin inducție matematică, formulele găsite, pentru orice număr natural $n \geq 1$:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

b) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

d) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

e) $\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\ldots+\frac{1}{(k+n-1)(k+n)}$, unde $k \geqslant 1$

este un număr natural.

6. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, sînt adevărate egalitățile:

a) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

b) $\frac{1^4}{1\cdot 3}+\frac{2^4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$.

7. Să se calculeze sumele următoare și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formulele găsite:

a) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$;

b) $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$;

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$;

d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$;

e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}$;

f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$.

8. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}},$$

pentru orice număr natural n.

9. Să se demonstreze că, pentru orice $n \geqslant 1$ număr natural, avem

$$\log_x\sqrt{a}+\log_{x^2}\sqrt[3]{a}+\log_{x^3}\sqrt[4]{a}+\ldots+\log_{x^{n+1}}\sqrt[n]{a}=\log_x\sqrt[n+1]{a^n},$$

10. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, au loc identitățile:

a) $\cos\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$;

b) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$;

c) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$;

d) $\sin x + 2 \sin 2x + \ldots + n \sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$;

e) $\cos x + 2 \cos 2x + \ldots + n \cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n \cos(n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$.

11. Să se determine toate numerele întregi x astfel încît

$$3x + 1 < 2 \log_2(x + 4).$$

12. Să se determine numerele naturale n pentru care este îndeplinită inegalitatea

$$2^n > n^2.$$

13. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, avem

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}.$$

14. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, au loc inegalitățile

$$\sqrt{n} < 2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

15. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, avem

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

16. Fie a, b numere reale cu $a + b > 0$, $a \neq b$. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, avem

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geqslant (a + b)^n.$$

17. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că:

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geqslant 1 + \frac{k}{n}$, pentru orice număr natural k;

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$, pentru orice număr natural $k \leqslant n$.

Să se deducă de aici, că pentru orice număr natural n, avem

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

18. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 6$, avem:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

19. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 2$ şi numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avem

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

(vezi ex. **26**, III, cap. IV).

20. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n şi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, avem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

21. Să se demonstreze că suma cuburilor oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 9.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, $n^5 - n$ se divide cu 30.

23. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$, următoarele propoziţii sînt adevărate:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133; b) $4^n + 15n - 1$ se divide cu 9;

c) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ se divide cu 17; d) $6^{10n+1} + 15^{11n-1}$ se divide cu 31.

24. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 4^{4n+1}$ se divide cu 23.

25. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, avem:

a) $2^n > n$; b) $2^{n+2} > 2n + 5$.

26. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 3$, avem:

a) $2^n > 2n + 1$; b) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

27. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 4$, avem $3^n > n^3$. Să se deducă că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, pentru $n \geqslant 4$.

28. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, avem

$$|\sin nx| \leqslant n |\sin x|.$$

29. Să se demonstreze că

$$\{k \mid k \in \mathbf{N}, k \geqslant 8\} = \{3p + 5q \mid, p, q \in \mathbf{N}, 3p + 5q \geqslant 8\}.$$

30. Să se demonstreze că oricare ar fi n drepte diferite situate în acelaşi plan şi care sînt concurente, împart planul în $2n$ părţi.

31. Să se demonstreze că oricare ar fi n plane, care trec prin acelaşi punct, astfel încît oricare trei dintre ele nu au o dreaptă comună, împart spaţiul în $n(n-1) + 2$ părţi.

32. Să se demonstreze că n drepte situate într-un plan, astfel încît oricare două dintre ele nu sînt paralele şi oricare trei nu sînt concurente, împart planul în $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ părţi.

33. Să se demonstreze că n plane astfel încît:

I) oricare două dintre plane nu sînt paralele;

II) oricare trei dintre plane nu trec printr-o aceeaşi dreaptă;

III) oricare patru nu trec prin acelaşi punct;

IV) oricare două drepte de intersecţie ale planelor date nu sînt paralele,

împart spaţiul în $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{7}$ părţi.

34. Să se demonstreze că n cercuri, situate într-un plan, împart planul în cel mult $n^2 - n + 2$ părţi. Dar, dacă cercurile sînt două cîte două secante?

35. Fie n pătrate arbitrare, unde n este un număr natural oarecare. Să se demonstreze că ele pot fi tăiate în părţi, astfel încît din părţile obţinute să se poată construi un nou pătrat.

36. (Teorema lui Euler.) Fie s numărul ţărilor unei hărţi arbitrare, l numărul frontierelor ei şi p numărul vîrfurilor. Să se arate că

$$s + p = l + 2.$$

37. Dacă p este numărul vîrfurilor, l numărul muchiilor şi s numărul feţelor unui poliedru convex, să se arate că

$$s + p = l + 2.$$

38. Să se demonstreze că n sfere, astfel încît oricare două să se intersecteze între ele, şi oricare trei nu au un cerc comun, împart spaţiul în $\frac{n(n^2-3n+8)}{3}$ părţi.

Capitolul X

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$; b) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$.

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420$; b) $\frac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000$.

3. Să se afle pentru cîte valori ale lui $n \geqslant 2$, natural, au loc inegalitățile:

a) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} < 306$; b) $\frac{(2n)!}{n!} < 1\,000$.

4. În cîte moduri se pot așeza cinci copii pe o bancă?

5. a) Popescu, Ionescu, Georgescu, Vasilescu, Stătescu trebuie să vorbească la o întrunire. În cîte moduri se poate face ordinea inscrierilor la cuvînt in așa fel incît Ionescu să nu vorbească înaintea lui Popescu?

b) Aceeași problemă cu condiția ca Popescu să ia cuvîntul de fiecare dată imediat înaintea lui Ionescu.

6. Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele posibile de cîte șase cifre, astfel încît în fiecare număr să nu fie cifre identice. Să se afle:

a) Cîte astfel de numere se pot obține?

b) Cîte numere încep cu cifra 1?

c) Cîte numere se termină în cifra 1?

d) Cîte numere încep cu 10?

e) Cîte numere nu încep cu 10?

7. Cîte variante de coliere se pot realiza din șapte mărgele de dimensiuni diferite, încît fiecare colier să conțină toate cele șapte mărgele?

8. În cîte moduri se pot așeza, pe o tablă de șah, opt turnuri astfel încît nici unul dintre ele să nu poată lua pe celălalt?

9. Fie date n numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Să se găsească numărul permutărilor acestora, astfel încît $a_1, a_2, \ldots, a_k$ să nu ocupe k locuri la rînd?

10. În cîte moduri se poate ordona mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît fiecare număr divizibil cu 2, și fiecare număr divizibil cu 3, să aibă rangul divizibil cu 2 și respectiv 3?

11. Să se calculeze

a) $\frac{A_n^5 + A_n^7}{A_n^6}$; b) $\frac{A_n^{n-1} - P_n}{C_n^{n-2}}$; c) $\frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}}$;

d) $\frac{A_{n+3}^n}{(n+2)A_{n+1}^{n-2}}$; e) $\frac{A_n^2 \cdot P_k - 2P_{k+1}}{P_{k+1}}$; f) $\frac{A_{n+k}^{n-k+2} + A_{n+k}^{n-k+1}}{A_{n+k}^{n-k}}$;

g) $\frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$; h) $\frac{A_n^k \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}$.

12. Să se rezolve ecuaţiile în n:

a) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$; b) $P_{n-3} \cdot A_n^3 = 20P_{n-2}$; c) $A_7^n = mA_7^{n-1}$;
d) $P_{n+2} = 182A_n^{11} \cdot P_{n-11}$; e) $A_{n+1}^{k+1} \cdot P_{n-k} = 90P_{n-1}$.

13. În cîte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziţie pînză de steag de cinci culori diferite?

14. Cîte dicţionare sînt necesare pentru a traduce direct din una în alta din următoarele şase limbi: română, rusă, engleză, franceză, germană, italiană?

15. Cinci creioane de diferite culori se împart la 9 copii de vîrste diferite, fiecare copil primind cel mult un creion. În cîte moduri se poate face aceasta? Dar dacă copilul mai mic va primi neapărat un creion?

16. Cîte numere naturale diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată?

17. În plan sînt date n puncte, oricare trei dintre ele necoliniare. Cîte linii poligonale (închise şi neînchise) cu k segmente se pot duce cu vîrfurile în punctele date?

18. Să se calculeze:

a) $\frac{C_{n+k}^k \cdot P_k - A_{n+k}^k}{P_k}$; b) $\frac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-1}^{k-1}}$.

19. Să se calculeze C_n^7 dacă $C_{20}^n = C_{20}^{n+2}$.

20. Să se afle n, dacă:

a) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$; b) $3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^n$; c) $13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}$; d) $C_{n+2}^4 = n^2 - 1$;
e) $C_{n+3}^{n+1} = n^2 - 4$; f) $C_{7n}^{n^2+10} = C_{28}^2$; g) $C_{n-2}^2 + C_{n-3}^2 + C_{n-4}^2 = 19$;
h) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 = 55$; i) $30C_{n-3}^{n-9} = 19A_{n-4}^4$.

21. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$; b) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^k$; c) $C_{15}^{k-2} > C_{15}^k$; d) $5C_n^3 > C_{n+2}^4$.

22. Să se determine valorile lui n, întregi pentru care numărul

$$C_{5n+4}^{n^2+3n-4}.$$

este definit.

23. Un elev are nouă cărţi de matematică, iar altul are 7 cărţi. În cîte moduri pot să schimbe cărţile între ei, o carte în schimbul alteia? Dar dacă schimbă cîte două cărţi în schimbul altora două?

24. Pentru un joc de agrement, cinci fete și trei băieți trebuie să formeze două echipe de cîte patru. În cîte moduri se pot forma echipele?

Dar dacă în fiecare echipă trebuie să fie neapărat un singur băiat?

25. Pentru întocmirea orarului unei clase de elevi, trebuie să fie programată în fiecare zi, fie o oră de desen din cele două pe săptămînă, fie o oră de fizică din cele patru pe săptămînă. În cîte moduri se poate face această programare?

26. Cîte numere de cîte cinci cifre se pot forma astfel încît în fiecare număr fiecare cifră să fie mai mare decît precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decît precedenta?

27. Dintr-o grupă de 15 copii, dintre care 9 băieți și 6 fete, trebuie să fie formată o echipă de 7 copii, în care să intre cel puțin 3 fete. În cîte moduri se poate forma această echipă?

28. La o serată dansantă participă 7 fete și 8 băieți. La un anumit dans trebuie să se formeze 4 perechi. În cîte moduri se pot forma cele patru perechi?

29. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 5A_x^y = 2A_{x+1}^y, \\ 3C_x^y = 2C_x^{y-1}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} = 8A_{2y}^{3x-1}, \\ 9C_{2y}^{3x} = 8C_{2y}^{3x-1}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3}, \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} xC_{n-1}^k + \dfrac{n}{k}y = \dfrac{k+1}{n}, \\ xC_{n+1}^{k+1} - \dfrac{n}{k+1}y = \dfrac{k}{n}. \end{cases}$

30. Să se arate că:

a) $\dfrac{C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + \ldots + C_{2n}^n}{C_1^1 + C_3^2 + C_5^3 + \ldots + C_{2n-1}^n} = 2;$ b) $\dfrac{C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n}^n}{C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n-1}^n} = 2^n.$

c) $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^{k+1}.$

31. Să se calculeze:

a) $C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_n^2;$ b) $(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2 + \ldots + (C_n^2)^2.$

32. Să se arate că dacă N_r este suma tuturor produselor de r factori luați dintre numerele $1, 2, \ldots, n$, atunci

$$1 + N_1 + N_2 + \ldots + N_{n-1} = n \cdot n!.$$

33. Fie M o mulțime cu n elemente. Să se calculeze:

a) $\text{card}\{(X, Y) \mid X, Y \subset M \text{ și } X \cup Y = M\};$

b) $\text{card}\{(X, Y) \mid X, Y \subset M \text{ și } X \cap Y = \emptyset\}.$

34. Să se arate că

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k!(2n-k)! = \frac{(2n+1)!}{n+1},$$

unde n și k sînt numere naturale cu $k \leqslant 2n$.

35. Dacă $S_k = 1!(1 + 1^2) + 2!(1 + 2^2) + \ldots + k!(1 + k^2)$, să se arate că

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)S_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)S_2 + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)S_n = (n+2)! - 2.$$

36. Să se dezvolte, după formula lui Newton, binoamele la putere:
a) $(x + a)^7$; b) $(x^2 - 2y)^6$; c) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^7$; d) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^6$;
e) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2}{y}}\right)^5$; f) $(a + \sqrt{a^2 - 1})^6 + (a - \sqrt{a^2 - 1})^6$;
g) $(1 + \sqrt{a})^7 - (1 - \sqrt{a})^7$; h) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^5 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^5$.

37. Să se determine:
a) termenul al optulea al dezvoltării $(2x + a)^{10}$;
b) termenul al cincilea al dezvoltării $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^9$;
c) termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\frac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^{14}$;
d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^{13}$.

38. Să se determine:
a) termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + \sqrt{a})^{14}$ care îl conține pe x^6;
b) termenul din dezvoltarea $(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y^2})^{15}$ care îl conține pe y^2;
c) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b} + \frac{b}{\sqrt[4]{a}}\right)^{22}$ care conține pe $\frac{1}{a^2}$;
d) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ care nu conține pe a;
e) termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{20}$ în care nu apare x.

39 Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}}\right)^{34}$ în care x și y au puteri egale.

40. Să se determine n, dacă în dezvoltarea $(a + x)^n$ coeficientul lui x^5 este egal cu coeficientul lui x^{10}.

41. Să se determine n, dacă coeficientul binomial al termenului de rang trei, al dezvoltării $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{a}}\right)^n$, este egal cu 190.

42. Să se determine n, dacă suma coeficienților termenilor, care au rangul doi, trei și respectiv patru, ai dezvoltării $(x^{-1} - \sqrt{x})^n$ este egală cu 41.

43. În dezvoltarea $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni este 121. Să se găsească termenul în care nu apare x.

44. Să se găsească termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})^n$, dacă coeficientul termenului al treilea este 28.

45. Să se determine x, dacă termenul al treilea al dezvoltării $(x + x^{\lg x})^5$ este 10^6, logaritmul fiind în baza 10.

46. Să se determine m, natural, astfel încît al zecelea termen al dezvoltării $(5 + m)^m$ să fie cel mai mare.

47. Să se determine n și x dacă, în dezvoltarea $\left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{\frac{1-x}{2}}\right)^n$ suma coeficienților primilor trei termeni este egală cu 22, iar suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este 420.

48. Fie dezvoltarea $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{1+\lg x}}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, logaritmul fiind în baza 10. Să se afle x, știind că al patrulea termen al dezvoltării este egal cu 200.

49. Să se determine termenul care conține pe $x^{2/3}$ în dezvoltarea $\left(\sqrt[9]{\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali este egală cu 128.

50. În dezvoltarea $\left(\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 256. Să se găsească termenul care conține pe $\frac{1}{a}$.

51. Să se găsească termenii raționali ai dezvoltărilor următoare:

a) $(\sqrt[5]{2} - \sqrt[7]{3})^{24}$; b) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^{10}$.

52. Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + \sqrt[14]{5})^{200}$.

53. Să se găsească termenii iraționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

54. Să se determine m, n, p astfel încît în dezvoltarea $\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$ termenii de rang 12 și 24 să conțină pe x, respectiv pe x^5 și, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

55. Să se găsească numărul total al termenilor dezvoltării $(x + y)^{2n+1} + (x - y)^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, după ce se efectuează reducerile de termeni posibile.

56. Fie a și b numere întregi nenule $(b > 0)$ prime între ele, astfel încît $\sqrt[7]{a}$ și $\sqrt[11]{b}$ să fie iraționale. Fără a efectua dezvoltarea binomului $(\sqrt[7]{a} + \sqrt[11]{b})^{77}$, să se găsească numărul termenilor raționali ai acesteia.

57. Să se determine coeficientul termenului, care conține x^3 în produsul dezvoltărilor $(1 + x)^7(1 - x)^4$.

58. Să se găsească suma coeficienților dezvoltărilor:

a) $(9x^4 - 8y^3)^{19}$; b) $(8x^2 - 6y^3)^8$.

59. Să se găsească suma coeficienților dezvoltării $(9x - 8y)^n$.

60. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltările:

a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^{100}$.

61. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, numărul $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ este natural.

62. Să se determine numărul de termeni care trebuie luați în dezvoltarea $(1 + 10^{-2})^{10}$ pentru a se defini numărul $(1 + 10^{-2})^{10}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-3}, respectiv 10^{-4}.

63. Să se arate că $\sum_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k}(-3)^k = 2^{6n}$.

64. Să se demonstreze că:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$;

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$.

65. Să se demonstreze că:

a) $1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \ldots = (-1)^n 2^n \cos \frac{2n\pi}{3}$;

b) $C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - \ldots = \frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}$.

66. Să se demonstreze că

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \ldots = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin \frac{n\pi}{6}.$$

67. Să se demonstreze că:

a) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$;

c) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$;

d) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}\right)$.

68. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$ și $|x| \leqslant 1$, avem

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n \leqslant 2^n.$$

69. Să se calculeze următoarele sume:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$; b) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n + 1)C_n^n$;
c) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n - 1)C_n^n$; d) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n - 1)C_n^n$;
e) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n(n + 1)C_n^n$;
f) $C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n - 1)C_n^n$;
g) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n$; h) $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$;
i) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}$; j) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$;

70. Să se calculeze următoarele sume:

a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)C_n^m$; b) $C_n^k + C_{n+1}^k + C_{n+2}^k + \ldots + C_{n+m}^k$;
c) $C_n^0 + C_n^k + C_n^{2k} + \ldots$; d) $C_n^m + C_n^{m+k} + C_n^{m+2k} + \ldots$

71. Să se calculeze următoarele sume:

a) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$; b) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots + (-1)^n(C_n^n)^2$;
c) $C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$; d) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \ldots + 2^n C_n^n$;

Capitolul XI

PROGRESII ARITMETICE ŞI PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului, cu termenul al n-lea dat de formula:

a) $a_n = 5n - 2$; b) $b_n = n^2 - 3$; c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}$;

d) $y_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + (-1)^n n$; e) $z_n = \frac{2n}{3n+1}$;

f) $c_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{(-1)^{n+1}}$; g) $a_n = \frac{1 + (-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}$.

2. Să se găsească formula termenului al n-lea ($n \geqslant 1$) pentru fiecare din şirurile:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$; b) $0;\ 0{,}01;\ 0{,}0101;\ \ldots$; c) $\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}, \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}, \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}, \ldots$; d) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \ldots$; e) $\frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{11}{17}, \ldots$

3. Şirul (x_n), $n \geqslant 1$, are termenul general dat de formula $x_n = 3n^2 - 2$. Să se decidă dacă este termen al acestui şir numărul:

a) 190; b) 241; c) 3725; d) 15985.

În caz afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

4. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului (a_n), definit prin:

a) $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = a_n + \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $a_1 = \beta$, $a_{n+1} = 2a_n$, $\beta \in \mathbf{R}$;

c) $a_1 = \gamma$, $a_{n+1} = \frac{\gamma}{a_n}$, $\gamma \in \mathbf{R}$; d) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_{n+2} = \alpha a_n - \beta a_{n+1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; e) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_{n+2} = \beta a_n + \alpha a_{n+1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5. Fie şirul de numere (a_n), unde $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, şi pentru orice număr natural k, avem

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}.$$

Să se demonstreze că $a_n = 2^n + 1$, oricare ar fi $n \geqslant 1$.

6. Fie şirul de numere reale (a_n), unde $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ şi pentru orice număr natural k, avem

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2.$$

Să se găsească formula termenului general.

7. Fie şirul de numere (b_n) astfel încît $b_1 = 1$ şi $b_{n+1} = b_1 - \frac{1}{n(n+1)}$. Să se găsească formula care defineşte termenul general.

8. Fie şirul (x_n), definit astfel: $x_1 = 1$ şi $x_{k+1} = (k+1)x_k$. Să se demonstreze că oricare ar fi n, avem $x_n = n!$.

9. Fie şirul (y_n) definit prin: $x_1 = \frac{2}{3}$ şi $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$. Să se găsească formula care defineşte termenul general.

10. Fie α, β numere reale cu $\alpha \neq \beta$. Se defineşte (c_n) astfel incit $c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$ şi pentru fiecare $k \geqslant 2$, $c_k = (\alpha + \beta)c_{k-1} - \alpha\beta c_{k-2}$. Să se arate că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geqslant 1$.

11. Fie α, β numere reale astfel incit $\alpha \neq \beta$ şi $\alpha\beta \neq 1$. Se defineşte şirul (a_n) astfel incit $a_2 = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta) - 1}$, iar pentru fiecare $k \geqslant 3$, $a_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{a_k}$.

Să se demonstreze că pentru orice $n \geqslant 2$, avem

$$a_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}.$$

12. Fie S_n suma primilor n termeni ai şirului

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \ldots .$$

a) Să se găsească o formulă pentru S_n.

b) Să se arate că $S_{p+q} - S_{p-q} = pq$, unde p şi q sint numere naturale cu $p > q$.

13. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 2$, $r = -3$; b) $a_{10} = 131$, $r = 12$;

c) $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$; d) $a_3 = 11$, $a_5 = 19$.

Să se dea apoi formula termenului al n-lea.

14. Să se găsească termenii a_1, a_3, a_5, a_6 ai progresiei aritmetice următoare:

$$a_1, -7, a_3, -1, a_5, a_6, 8, \ldots .$$

15. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice (a_n), dacă $a_5 = \frac{\alpha}{3}$ şi $r = \frac{10\alpha}{3}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

16. Fie (x_n) o progresie aritmetică astfel incit $x_1 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ şi $r = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Să se determine n, ştiind că $x_n = 4\alpha + 3\beta (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

17. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7, \\ a_8 - a_7 = 2a_4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 a_2 a_3 = 120, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 15; \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12, \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18. \end{cases}$

18. Să se găsească suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 2$, $a_5 = 14$; b) $a_{10} = 50$; $r = 7$.

19. Șirul (y_n) este dat prin formula termenului al n-lea:
$y_n = \alpha n + \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că șirul (y_n) este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său și rația.

20. Să se decidă dacă este progresie aritmetică un șir pentru care suma primilor n termeni este dată de formula $S_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. În caz afirmativ, să se găsească formula termenului general.

21. Să se determine termenul al n-lea al unei progresii aritmetice (a_n), dacă $a_1 = \alpha$ și $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$.

22. Să se demonstreze că, oricare ar fi trei termeni consecutivi ai șirului (a_n), dat prin formula termenului general următoare, nu sînt în progresie aritmetică:

a) $a_n = n^2$; b) $a_n = \sqrt{n}$; c) $a_n = \frac{1}{n}$.

23. Fie (a_n) o progresie aritmetică. Să se studieze dacă este progresie aritmetică șirul (b_n) al cărui termen general este dat de formula următoare:

a) $b_n = \alpha a_n$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $b_n = a_{2n}$; c) $b_n = a_n + \alpha$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$;

d) $b_n = \frac{\alpha}{a_n}$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$; e) $b_n = a_n^2$.

24. Să se arate că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$, numerele $(a+b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a-b)^2$ sînt în progresie aritmetică.

25. Să se arate că dacă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sînt în progresie aritmetică, atunci ele sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5.

26. Să se determine suma primilor n termeni ai șirului:

a) 1, −2, 3, −4, ...; b) 1, −3, 5, −7, ...

27. Fie numerele a_1, a_2, a_3 și respectiv b_1, b_2, b_3 în progresie aritmetică. Să se arate că, dacă $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, iar numerele $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ sînt în progresie aritmetică, atunci $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

28. Să se găsească termenul general al șirului

$$2, 4, 7, 11, \ldots,$$

care are proprietatea că diferențele între termenii vecini formează o progresie aritmetică.

29. Fie a, b, c, d numere reale nenule, astfel încît:

$$a\sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}},\quad b\sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}},\quad c\sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}},\quad d\sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}}$$

sînt în progresie aritmetică. Să se arate că a^2, b^2, c^2, d^2 sînt în progresie aritmetică.

30. Dacă α, β, γ sînt măsurile unghiurilor unui triunghi, să se arate că $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ sînt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos 2\gamma$ sînt în progresie aritmetică.

31. Se dă binomul $(a+b)^m$, unde $a = \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}$ și $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$, logaritmul fiind în baza 10. Să se determine x, știind că termenul dezvoltării care conține pe b^5 este 21, iar coeficienții binomiali ai celui de-al doilea, al treilea și al patrulea termen al dezvoltării binomului sînt în progresie aritmetică.

32. Să se găsească toate valorile reale ale lui a, nenule, astfel încît ecuația

$$x^8 + ax^4 + a^4 = 0$$

să aibă exact patru rădăcini reale, care să fie în progresie aritmetică.

33. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (b_n), dacă:
a) $b_1 = 3,\ \ q = -2$; b) $b_8 = 384,\ \ q = 2$; c) $b_6 = 25,\ \ b_8 = 9$; d) $b_3 = 20,\ b_9 = 1280$.

34. Să se găsească termenii b_2, b_3, b_5, b_6 ai progresiei geometrice următoare:

$$\sqrt{2},\ b_2,\ b_3,\ 12\sqrt{3},\ b_5,\ b_6,\ 216\sqrt{2},\ \ldots .$$

35. Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii geometrice (a_n), dacă:
a) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15, \\ a_4 - a_2 = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_5 + a_2 - a_4 = -119, \\ a_4 + a_1 - a_3 = 265. \end{cases}$

36. Să se decidă dacă este progresie geometrică un şir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:
a) $S_n = n^2 + 1$; b) $S_n = 4^n - 1$; c) $S_n = 5^n - 5$.

37. Fie (b_n) o progresie geometrică. Să se studieze dacă este progresie geometrică şirul (c_n), al cărui termen general este dat de formula următoare:
a) $c_n = \beta b_n$, cu $\beta \in \mathbf{R}$; b) $c_n = b_{2n}$; c) $c_n = b_n + \beta$, cu $\beta \in \mathbf{R}$;
d) $c_n = \dfrac{\beta}{b_n}$, cu $\beta \in \mathbf{R}$; e) $c_n = b_n^3$.

38. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, cu $|a| \neq |b|$, să se arate că numerele $(a+b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a-b)^2$ sînt în progresie geometrică.

39. Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ sînt în progresie geometrică, atunci

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2.$$

40. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încît $(xy + yz + zx)^3 = xyz(x + y + z)^3$. Să se arate că numerele x, y, z sînt în progresie geometrică.

41. Să se calculeze suma

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \ldots + 100 \cdot 2^{90}.$$

42. Să se demonstreze că

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1}).$$

43. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă numerele ab, b^2, c^2 sînt în progresie aritmetică, atunci numerele b, c $2b - a$ sînt în progresie geometrică.

44. Să se găsească suma

$$3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

45. Fie (a_n) o progresie aritmetică, iar (b_n) o progresie geometrică cu termeni pozitivi, astfel încît $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Să se demonstreze că $a_n \leqslant b_n$, pentru orice n.

46. Fie a_1, a_2, a_3 şi b_1, b_2, b_3 cîte trei numere în progresie aritmetică (respectiv geometrică) astfel încît $b_1 \neq b_2$ şi $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Să se arate că, dacă a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 sînt în progresie aritmetică, atunci $a_1 = b_2$ (respectiv $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$).

47. Fie numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 în progresie geometrică, astfel încît suma logaritmilor, în baza 3, a acestor numere să fie egală cu 2. Să se găsească aceste numere, ştiind că $\log_3(a_5/a_3) = -2$.

48. Să se găsească suma tuturor numerelor naturale, mai mici sau egale cu 1 000 şi care nu se divid cu 13.

49. Suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice este egală cu 62. Dacă termenii: al cincilea, al optulea şi al unsprezecelea, ai acestei progresii sînt respectiv, primul, al doilea şi al zecilea termen pentru o progresie aritmetică, să se găsească primul termen al progresiei geometrice.

50. Fie numerele reale distincte a, b, c cu $a + b + c = 124$, astfel încît acestea să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Dacă presupunem, în plus, că a, b, c sînt, respectiv al treilea, al treisprezecelea şi al cincisprezecelea termen pentru o progresie aritmetică, să se determine numerele a, b, c.

51. Suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 130. Dacă presupunem, în plus, că termenii: al patrulea, al zecelea şi al şaptelea ai acestei progresii sînt, în această ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, să se determine primul termen al progresiei aritmetice.

52. Dacă a_1, a_2, ..., a_n sînt numere pozitive în progresie geometrică, să se arate că

$$a_1a_2 \dots a_n = \sqrt{(a_1a_n)^n}.$$

53. Fie $a \in \mathbf{R}$ un număr real. Să se arate că există $b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît b să fie media aritmetică între a şi c, c să fie media geometrică între a şi b şi a să fie media armonică (a se vedea ex. 33, cap. IV) între b şi c.

54. Fie a_1, a_2, ..., a_{2n}, un număr par de numere reale în progresie geometrică, astfel încît suma lor să fie de cinci ori mai mare decît suma termenilor de rang par. Să se găsească raţia progresiei.

55. Fie (a_n) o progresie aritmetică şi (b_n) o progresie geometrică, astfel încît

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 155, \quad b_1 + b_2 = 9.$$

Să se determine progresiile dacă a_1 este raţia progresiei geometrice, iar b_1 este raţia progresiei aritmetice.

56. Fie (a_n) o progresie aritmetică şi (b_n) o progresie geometrică, astfel încît

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3 - 8.$$

Să se determine progresiile.

57. Fie (a_n) o progresie aritmetică cu termeni pozitivi, astfel încît $a_2 = \sqrt{a_1a_4}$.

Să se demonstreze că a_4, a_6, a_9 sînt în progresie geometrică.

Să se determine raţia.

58. Fie numerele reale pozitive a_1, a_2, ..., a_{2n+2}, în progresie geometrică descrescătoare. Să se demonstreze că

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \dots \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} < \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+2}}}.$$

59. După o povestire orientală, inventatorul jocului de şah solicitînd recompensa, s-a adresat suveranului său astfel: „Eu doresc pentru prima

căsuţă un bob de griu, pentru a două, 2 boabe de griu, pentru a trei 2^2 boabe de griu ş.a.m.d., pentru a 64-a doresc 2^{63} boabe de griu". Să se calculeze numărul boabelor de griu cerute suveranului.

60. Să se arate că în triunghiul lui Pascal, suma termenilor fiecărei linii este dublul sumei termenilor liniei precedente. Să se afle suma termenilor unui triunghi al lui Pascal cu 64 de linii.

61. Dacă $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, să se găsească sumele:

I) $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n + \dfrac{1}{a^n}\right)^2$;

II) $\left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n - \dfrac{1}{a^n}\right)^2$.

62. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive.

a) Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie aritmetică, să se calculeze

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}.$$

b) Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie geometrică, să se calculeze

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}.$$

63. Fie numerele pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, în progresie geometrică crescătoare şi p un număr natural nenul. Să se arate că raportul sumelor

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p}$$

şi

$$S_n' = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p}$$

nu depinde de n.

64. Un şir de numere $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este astfel încît, oricare ar fi k, avem:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = ak^2 + bk,$$

unde a, b sînt numere reale date. Să se demonstreze că acest şir este o progresie aritmetică. Să se deducă în funcţie de a şi b primul termen şi raţia acesteia.

65. Să se găsească termenul general al şirului (a_n), definit prin:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ şi pentru orice } n \geqslant 2 \text{ avem } \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n a_n.$$

66. Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ în progresie aritmetică, cu raţia r şi fie $S_n = a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$, unde $m \in \mathbf{N}$.

a) Calculîndu-se diferenţele $a_{k+1}^p - a_k^p$, pentru $k = 1, 2, \dots, n$, să se demonstreze că

$$a_{n+1}^p - a_1^p = C_p^1 r S_{p-1} + C_p^2 r^2 S_{p-2} + \dots + C_p^{p-1} r^{p-1} S_1 + C_p^p r^p S_0,$$

oricare ar fi $p \geqslant 1$, număr natural.

b) Reciproc, dacă egalitatea de mai înainte este adevărată pentru orice p şi n, atunci numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia r.

67. Se formează numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$, definite prin relaţia de recurenţă: $b_n = \alpha b_{n-1} + \beta$, unde b_1, α, β sînt numere reale date.

a) Presupunem că $\alpha \neq 1$ şi fie q rădăcina ecuaţiei $x = \alpha x + \beta$. Să se demonstreze că numerele: $b_1 - q, b_2 - q, \ldots, b_n - q$ sînt în progresie geometrică. Să se deducă, de aici, expresia lui b_n în funcţie de n.

b) Să se deducă o formulă pentru suma

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Să se examineze cazul $\alpha = 1$.

68. Să se calculeze suma

$$S = a_1a_2a_3 \ldots a_k + a_2a_3a_4 \ldots a_{k+1} + \ldots + a_{n+1}a_{n+2} \ldots a_{n+k},$$

unde (a_n) este o progresie aritmetică.

69. Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{a_1a_2 \ldots a_k} + \frac{1}{a_2a_3 \ldots a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1} \ldots a_{n+k-1}},$$

unde (a_n) este o progresie aritmetică.

70. Să se calculeze sumele:

a) $S_1 = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n$;

b) $S_2 = q + 4q^2 + 9q^3 + \ldots + n^2q^n$,

q fiind un număr real.

71. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ numere în progresie aritmetică şi $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Să se demonstreze că

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}.$$

Capitolul XII

NOŢIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Folosind algoritmul lui Euclid să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 63; 1971; b) 285; 322; c) -10; 55; d) -72; -88; e) -45; 525; f) 720; 2860; g) 4410; 3675.

2. Folosind teorema fundamentală a aritmeticii să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 160; 120; b) 180; 240; c) 1250; 200; d) 1620; 584.

3. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 5 care împărţit prin 6, 8, 9, 12 şi 16 să dea acelaşi rest 5.

4. Să se găsească cel mai mic număr natural mai mare ca 6 care împărţit prin 8, 12, 20 şi 30 să dea acelaşi rest 6.

5. Să se determine numerele naturale a şi b astfel încît $a + b = 60$ şi cel mai mare divizor comun al lor este 12.

6. Să se determine numerele naturale a şi b astfel încît cel mai mare divizor comun este 6 şi cel mai mic multiplu comun este 216.

7. Să se determine numerele naturale a şi b $(a > b)$ astfel încît $a^2 - b^2 = 2880$ şi cel mai mare divizor comun al lui a şi b este 8.

8. Care este ultima cifră a numerelor: 323^{700}, 1244^{51}, 1982^{83}, 164^{41}, 194^{53}, $17^{60} + 12^{40}$, $13^{20} + 22^{30}$?

9. Care este restul împărţirii numerelor:

a) $19^{42} \times 23^{51}$ prin 7; b) $17^{36} \times 21^{41}$ prin 5 ?

10. Care este ultima cifră a numărului 7^{7^7} ?

11. Dacă $n \geqslant 5$, atunci ultima cifră a numărului $1! + 2! + \ldots + n!$ este egală cu 3. Să se deducă de aici că numărul $1! + 2! + \ldots + n!$ pentru $n \geqslant 4$ nu este pătrat perfect.

12. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că restul împărţirii lui n^3 prin 7 este 0 sau 1 sau 6.

13. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se determine restul împărţirii lui $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ prin 4.

14. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$, fracţiile: a) $\dfrac{5n+3}{8n+5}$, b) $\dfrac{33n+4}{22n+3}$ sînt ireductibile.

15. Fie $n, a, b \in \mathbf{N}$. Dacă $5a - 21b = \pm 1$, atunci fracţia $\dfrac{21n+a}{5n+b}$ este ireductibilă.

16. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor $5a + 17b$ şi $2a + 7b$ este egal cu cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

17. Fie a şi b două numere prime. Să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor: $a + b$ şi $a - b$.

18. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Să se arate că: $7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a$ şi $7 \mid b$.

19. Să se demonstreze că dacă $n \geq 2$ atunci 3 nu divide numărul $C_n^2 + 1$.

20. Dacă $n \geq 2$, să se arate că 3 divide numărul $C^2_{C_n^2}$.

21. Să se arate că numărul $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ se divide prin 10 dacă n este impar.

22. Să se arate că: $6/n^3 - n$, $30/n^5 - n$, $42/n^7 - n$, $6/n^3 + 11n$, $60/n(n^2-1) \cdot \cdot (n^2 + 1)$, $6/n(n + 1)(2n + 1)$, $6/n(2n + 1)(7n + 1)$, $24/n(n + 1)(n + 2) \cdot \cdot (n + 3)$.

23. Fie m şi n numere naturale. Să se arate că: $m!n!$ divide $(m + n)!$

24. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $5/n^2 - 3n + 6$.

25. Să se arate că numărul $\dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$.

26. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $7/n^3 + n - 2$.

27. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $7/2^{2n} + 2^n + 1$.

28. Să se arate că: $7/3^{2n+1} + 2^{n+2}$; $11/3^{2n} + 2^{6n-5}$.

29. Să se arate că: $5/17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

30. Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, să se arate că: $170/153^n + 45^n - 28^n$.

31. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că: $7/2^n - 1 \Leftrightarrow 3/n$.

32. Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că 7 nu divide pe $2^n + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

33. Să se determine $a \in \mathbf{Z}$, astfel încît: $11/3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

34. Să se arate că dacă n este un număr natural, atunci: $n^2/(n + 1)^n - 1$.

35. Dacă p este un număr prim, să se arate că: p/C_p^k, pentru orice $0 < k < p$.

36. Dacă p este un număr prim, să se arate că: $p/2^p - 2$.

37. Dacă numărul $a^k - 1 (a \in \mathbf{Z}$ şi $k > 1)$ este prim, atunci $a = 2$ şi k este număr prim.

38. Dacă numărul $a^n + 1$ este prim ($a > 1$ şi $n > 1$, $a \in \mathbf{N}$), atunci a este par şi n este de forma 2^m.

39. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul $3n^2 - 1$ nu se divide nici cu 3, nici cu 5 şi nici cu 7.

40. Fie a, b două numere naturale nenule. Dacă a/b^2, b^2/a^3, a^3/b^4, b^4/a^5, ... atunci $a = b$.

41. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sînt de forma $4k - 1$; $k \in \mathbf{N}$.

42. Să se arate că există o infinitate de numere naturale prime care sînt de forma $6k - 1$, $k \in \mathbf{N}$.

43. Dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci numărul: $E = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ este un pătrat perfect.

44. Fie $m, n \in \mathbf{N}$. Dacă $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, atunci m şi n sînt pătrate perfecte.

45. Dacă p este un număr prim, $p \geqslant 5$, atunci restul împărțirii lui p^2 prin 12 este 1.

46. Dacă p și $8p^2 + 1$ sînt numere prime, atunci $8p^2 - 1$ este de asemenea număr prim.

47. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x + y = xy$.

48. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

49. Să se arate că nu există numerele întregi $x > 0$ și $y > 0$ astfel încît să avem egalitatea: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

50. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația: $5x + 7y^2 = 1600$.

51. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $x = 4[\sqrt{x}] + 1$.

52. Să se afle valorile numărului $n \in \mathbf{N}$ astfel încît 12 să dividă pe $n^4 - n^2 - 24$.

53. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Dacă există două numere prime distincte care îl divid pe n, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ este 1.

54. Fie p un număr natural și $n = p^m (m > 0)$. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor: $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ este p.

55. Care sînt ultimele două cifre ale numărului 2^{999}?

56. Să se arate că suma a n numere naturale impare consecutive nu este un număr prim $(n > 1)$.

57. Dacă $n > 0$ este un număr natural, numărul $n^4 + n^2 + 1$ poate fi prim?

58. Să se demonstreze că numărul $2^{2^n} - 1$ are în descompunerea sa în factori primi cel puțin n numere prime distincte.

59. Fie $n \geqslant 1$ un număr natural avînd descompunerea sa în factori primi $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ unde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt numere prime distincte. Să se arate că numărul divizorilor (pozitivi) ai lui n este $(k_1 + 1)(k_2 + 2) \ldots (k_n + 1)$.

60. Să se arate că orice număr de n cifre $(n > 1)$ este mai mare decît produsul cifrelor sale.

61. Din șirul de numere naturale $1, 2, 3, \ldots, 2n$ se aleg $n + 1$ numere. Să se arate că în aceste $n + 1$ numere alese există două numere astfel ca unul să îl dividă pe celălalt.

62. Fie $a, b, c, \in \mathbf{Z}$. Dacă $6/a + b + c \Rightarrow 6/a^3 + b^3 + c^3$.

63. Dacă m, n sînt numere naturale astfel încît $m = n + 2$, să se arate că numerele $n^4 + 4$ și $m^4 + 4$ nu sînt prime între ele.

64. La ce putere apare 2 în descompunerile lui 50! și 100!?

65. Fie m, n două numere naturale nenule. Să se arate că:

$\pm \frac{1}{n} \pm \frac{1}{n+1} \pm \frac{1}{n+2} \pm \ldots \pm \frac{1}{n+m} \notin \mathbf{Z}$. (semnele +, respectiv — se iau oricum).

66. Să se arate că nu există pătrate perfecte de forma:

$$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5, \text{ cu } n \text{ număr întreg.}$$

67. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ o rearanjare oarecare a numerelor $1, 2, 3, \ldots, 9$. Să se arate că numărul: $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \ldots (a_9 - 9)$ este par.

68. Să se arate că dacă $9/a^3 + b^3 + c^3$, cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$, atunci cel puţin unul dintre numerele a, b sau c este divizibil cu 3.

69. Să se arate că există o infinitate de numere întregi n astfel încît $4n^2 + 1$ să fie divizibil cu 5 şi cu 13.

70. Se dau 51 de numere naturale cuprinse între 1 şi 100. Să se arate că există printre acestea, două cu proprietatea că unul îl divide pe celălalt.

71. Fiind date $2^{n+1} - 1$ numere întregi, să se arate că există 2^n dintre acestea cu suma divizibilă cu 2^n.

72. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$, există o infinitate de numere întregi avînd exact $2n$ divizori.

73. Să se arate că un număr întreg n are $4m + 2$ divizori întregi ($m \in \mathbf{N}$) dacă şi numai dacă $|n|$ este un pătrat perfect.

74. Fie n un număr prim care scris în baza 10 are toate cifrele egale cu 1. Să se arate că numărul cifrelor sale este tot un număr prim.
Este adevărată reciproca?

75. Să se arate că oricare ar fi un număr natural n, există n numere întregi consecutive care să aibă fiecare cel puţin 2 divizori primi distincţi.

76. Să se arate că oricare ar fi numerele întregi a, m, n, cu $m, n > 0$, avem: $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

77. Să se arate că între numerele n şi $n!$ există cel puţin un număr prim ($n \geqslant 2$).

78. Dacă a şi $b \in \mathbf{Z}$ astfel încît $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}$, atunci a şi b sînt cuburi perfecte.

79. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului 2^{30}.

80. Să se determine ultimele trei cifre ale numărului $39^{30} - 38^{30}$.

Capitolul XIII

POLINOAME CU COEFICIENȚI COMPLECȘI. ECUAȚII ALGEBRICE

1. Să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g dacă:

a) $f = X^5 - X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - 4$, $g = X^2 - X + 3$;
b) $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + 1$, $g = X^3 - X + 1$;
c) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 15X + 3$, $g = X^2 + X + 1$;
d) $f = X^8 - 3X^6 + 5X^4 - 2X^2 + 1$, $g = X^3 - 4X + 1$.

2. Aplicînd schema lui Horner, să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f:

a) $f = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 7X + 9$, $g = X - 1$;
b) $f = 3X^5 - 4X^4 + 7X^3 + X + 3$, $g = X - 2$;
c) $f = -2X^6 + 8X^5 - 5X^4 + 3X + 7$, $g = X + 3$;
d) $f = 4X^3 + 6X^2 - 7X + 9$, $g = 2X + 1$.

3. Să se determine un polinom de gradul doi $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$ astfel încît: $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 9$.

4. Să se determine în raport cu parametrul m, gradul polinomului $f = (m^2 + 3m + 2)X^4 + (m^3 + 2m^2 - m - 2)X^3 + (m^2 + 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 1$.

5. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 6$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{7 + \sqrt{41}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}}$.

6. Fie polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 1$. Să se calculeze valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{2}}$.

7. Fie polinomul $f = X^3 - 3X + 5$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$.

8. Fie polinomul $f = X^3 - 6X + 8$. Să se determine valoarea acestui polinom pentru $\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}$.

9. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți numere întregi.

I) Să se arate că dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci $f(a)$ divide numărul: $f(a + f(a))$.
II) Să se arate că există un număr $a \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(a)$ să nu fie un număr prim.

10. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît să fie îndeplinită condiția: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

11. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = X^4 + mX^3 + 2X^2 - 8$ împărțit la $X - 2$ să dea restul 4.

12. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 5.

13. Să se afle polinomul de gradul cel mai mic astfel încît împărţit la $X + 1$ să dea restul 2 şi împărţit la $X - 1$ să dea restul -3.

14. Să se arate că restul împărţirii polinomului f prin $(X - a)(X - b)$ unde $b \neq a$ este $r = \dfrac{(X - a)f(b) - (X - b)f(a)}{b - a}$.

15. Să se arate că restul împărţirii polinomului cu coeficienţi reali $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ prin $X^2 + 1$ este polinomul $r = g(-1) + h(-1)X$ unde $g = a_0 + a_2X + a_4X^2 + a_6X^3 + a_8X^4 + \ldots$, iar $h = a_1 + a_3X + a_5X^2 + a_7X^3 + \ldots$

16. Să se determine parametrul m astfel ca polinomul $X^4 + 4X^3 - X^2 + 6X - m$ să se dividă prin $X + 2$.

17. Să se arate că polinomul $X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 5X - 3$ se divide la $X - 1$; se cere cîtul împărţirii.

18. Dacă n este un număr par, să se arate că $X + 1$ divide polinomul $(X - 1)^n - (X + 3)^n$, dar $(X + 1)^2$ nu divide pe $(X - 1)^n - (X + 3)^n$.

19. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

20. Să se arate că polinomul $nX^{n+2} - (n + 1)X^{n+1} + X$ este divizibil prin $(X - 1)^2$.

21. Să se arate că polinomul $X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3$ este divizibil prin $(X - 1)^2$; să se afle cîtul împărţirii.

22. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n+3}$.

23. Să se arate că $X^2 + X + 1$ divide polinomul $X^{6n-1} + X + 1$.

24. Să se arate că $X^2 + 1$ divide polinomul $(X^4 - X - 1)^{2n+1} + (X^4 + X - 1)^{2n+5}$.

25. Să se arate că polinomul $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X$ se divide cu $X^2 - 1$.

26. Să se arate că polinomul $X^{5a_1} + X^{5a_2+1} + X^{5a_3+2} + X^{5a_4+3} + X^{5a_5+4}$, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 fiind numere naturale, este divizibil prin $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

27. Să se arate că polinomul $(X^2 + X + 1)^{8n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$.

28. Să se arate că polinomul $(X - 1)^{n+3} + X^{2n+3}$ se divide la $X^2 - X + 1$.

29. Să se determine un polinom f de gradul cinci ştiind că $f + 1$ este divizibil cu $(X - 1)^3$ iar $f - 1$ este divizibil cu $(X + 1)^3$.

30. Pentru ce valori ale lui m, polinomul $(X - 1)^m - X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

31. Pentru ce valori ale lui m, polinomul $(X - 1)^m + X^m + 1$ se divide la $X^2 - X + 1$?

32. Să se determine polinoamele cu coeficienţi reali care satisfac relaţia: $XP(X - 1) = (X - 26)P(X)$.

33. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît: $Xf(X) = (X - 3)f(X + 1)$.

34. Fie $f(X)$ un polinom de gradul doi cu coeficienţi raţionali; atunci $f(n) \in \mathbf{Z}$ pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ dacă şi numai dacă $f(X)$ este de forma $f(X) = \frac{1}{2}[cX^2 + (2b - c)X + 2a]$ cu $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

35. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor, cu ajutorul algoritmului lui Euclid:

a) $f = 6X^6 - X^5 - 6X^4 + 4X^3 + 8X^2 - 7X + 2$, $g = 2X^5 - X^4 - 10X^3 + 15X^2 - 9X + 2$;

b) $f = 5X^7 - 10X^6 + 8X^5 - 16X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 2$, $g = 5X^5 - 9X^4 - 2X^3 + 2X - 4$;

c) $f = 10X^7 + 35X^5 - 13X^4 + 15X^3 - 14X^2 + 3X$, $g = X^5 + 2X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 4X - 2$;

d) $f = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 15X + 3$, $g = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3$;

e) $f = 2X^6 + 5X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 5X + 3$, $g = 2X^5 + 5X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 5X - 3$.

36. Să se arate că următoarele polinoame sînt prime între ele:

a) $f = X^4 + X^3 + 3X^2 + 7X + 20$, $g = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 20$;

b) $f = X^5 - 6X^4 + 8X^3 + X^2 - 6X + 8$, $g = X^4 + 7X^3 + 18X^2 + 22X^2 + 12$.

37. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n - 1$ şi $X^m - 1$.

38. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^n + a^n$ şi $X^m + a^m$.

39. Să se descompună în factori, cu coeficienţi reali, polinoamele:

a) $f = X^4 - 1$; b) $f = X^6 - 1$; c) $f = X^8 - 1$.

40. Să se descompună în factori, cu coeficienţi reali, polinomul $f = X^{2n} - 1$.

41. Să se rezolve ecuaţiile, ştiind că între rădăcini există relaţiile:

a) $4x^4 + 14x^3 - 4x^2 - 26x + 12 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

b) $2x^3 - 9x^2 + mx + 75 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

c) $6x^3 - mx^2 + 64x + 12 = 0$, $x_1 = 3x_2$;

d) $x^4 - 12x^3 - 2x^2 + mx + 297 = 0$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$;

e) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$;

f) $3x^3 - 32x^2 + 73x + 28 = 0$, $x_1 - x_2 = 3$;

g) $2x^4 + 2x^3 - 38x^2 + 22x + 60 = 0$, $x_1 + x_2 = -3$;

h) $x^4 + 10x^3 + mx^2 + 50x + 24 = 0$, $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$;

i) $x^3 + 5x^2 - 2x - m = 0$, $x_1 + x_2 = -7$;

j) $2x^3 + x^2 - 76x + 105 = 0$, $x_1 - x_2 = 12$;

k) $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$, $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

42. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$, să se arate că:

a) $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$;

b) $3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5) = 5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$.

43. Fie ecuaţia $x^3 + (2m - 5)x^2 + (9 - 5m)x + 2(m - 3) = 0$ unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că această ecuaţie are o rădăcină independentă de m.

b) Dacă x_2 şi x_3 sînt celelalte două rădăcini, să se determine m astfel încît $\lg|x_2 - x_3| = \frac{1}{2}\lg(6m + 5)$.

44. Fie ecuaţia: $4ax^4 - 2(a^2 + a + 1)x^3 + (a^2 - 16a + 1)x^2 + 8(a^2 + a + 1)x - 4(1 + a^2) = 0$.

a) Să se arate că ecuaţia are trei rădăcini raţionale independente de a.

b) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuaţiei, să se determine a astfel încît:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{11}{2}.$$

45. Fie ecuaţia $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$.

a) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, ecuaţia are o rădăcină ce aparţine intervalului $[-1, 1]$.

b) Să se determine m ştiind că ecuaţia are o rădăcină dublă.

c) Să se determine m astfel încît $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} < 6$ unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei.

46. Să se arate că ecuaţia: $x^4 + (a + 1)x^3 + \left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right)x^2 + bx + c = 0$, $a,b,c \in \mathbf{R}$, are cel mult două rădăcini reale.

47. Să se arate că ecuaţia $x^4 + mx^3 + (2m^2 + 1)x^2 + nx + p = 0$ nu poate avea toate rădăcinile reale unde $m, n, p \in \mathbf{R}$.

48. Se dă polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + b$. Să se determine a şi b şi să se rezolve ecuaţia $f(X) = 0$, ştiind că restul împărţirii lui $f(X-1)$ la $X + 1$ este -4 şi că rădăcinile ecuaţiei $f(X) = 0$ satisfac relaţia: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9$.

49. Se dă polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$. Să se determine a şi b şi să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ ştiind că restul împărţirii polinomului $f(X + 1)$ la $X - 8$ este 9 şi că rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ satisfac relaţia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{13}{2}$.

50. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.
Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $e^{f(x)} \leqslant 1$.

51. Să se arate, prin inducţie după n, că rădăcinile polinomului $f = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ sînt $1,2,\ldots,n$.

52. Să se arate că rădăcinile polinomului: $f = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$ sînt simple.

53. Să se arate prin inducţie că rădăcinile ecuaţiei

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!} = 0,\ n \in \mathbf{N},$$

sînt $-1, -2, -3, \ldots, -n$.

54. Fie ecuaţia $x^3 + x + m = 0$ unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine m astfel încît $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$ unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei.

55. Se consideră ecuaţiile $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ şi $y^3 + (b + c)y^2 + (c + a)y + a + b = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3, respectiv y_1, y_2, y_3. Să se determine a, b, c astfel încît $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3 + 1$.

56. Fie ecuaţia $x^4 + m^2x^3 + 3x + 1 = 0$ unde $m \in \mathbf{R}$. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, această ecuaţie are o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$.

57. Să se rezolve ecuaţia $x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 12x + m = 0$, ştiind că rădăcinile sînt în progresie geometrică.

58. Se dă polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X - m - 1$ unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $E(m) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în care x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

b) Să se determine valorile parametrului m astfel încît $E(m) \geqslant 3(x_1x_2x_3)^2$.

c) Să se determine m astfel încît polinomul f să se dividă la $X - 1$ şi să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ în acest caz.

59. Să se arate că polinomul $f = X^4 + 12X - 5$ are două rădăcini a căror sumă este egală cu 2; să se rezolve ecuaţia.

60. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$.

a) Să se determine n şi p astfel încît $X^2 + 1$ să dividă pe f.

b) Dacă g este cîtul împărţirii lui f la $X^2 + 1$, să se calculeze $g(1) + g(2) + \dots + g(n)$.

61. Fie polinomul $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Să se determine a, b, c, d astfel încît $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^4$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

62. Să se arate că ecuaţia $x^3 + 3x - 2 = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$. Să se arate că celelalte două rădăcini sînt complexe.

63. Să se arate că ecuaţia: $x^3 - 3x - 2\sqrt{2} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} + \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$.

64. Să se arate că ecuaţia $x^3 - 3x - 2\sqrt{3} = 0$ are rădăcina reală $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

65. Să se rezolve în mulţimea $\mathbf{C}$, ecuaţia $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = 0$ ştiind că admite o rădăcină reală.

66. Fie polinomul : $f = X^4 + aX^3 + bX + c$.

a) Să se arate că nu există valori ale lui $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel ca f să se dividă la $X^3 - X$.

b) În cazul cînd $f(0) = f(1)$ să se determine a, b, c astfel ca polinomul f să aibă rădăcina $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ şi în acest caz să se determine celelalte rădăcini.

67. Să se determine m şi să se rezolve ecuaţia $2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$, ştiind că are o rădăcină dublă.

68. Fie ecuaţia $x^3 + px^2 + 2p^2x + 3p^3 = 0$. Să se arate că $16(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 + 27(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 = 0$.

69. Să se determine a, b, c astfel ca aceste numere să fie rădăcinile ecuaţiei $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$.

70. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că $f(\alpha) \geqslant 0$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$. Atunci există două polinoame $f_1, f_2 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît $f = f_1^2 + f_2^2$.

71. Fie f un polinom cu coeficienţi întregi şi $a \in \mathbf{Z}$. Dacă $f(a)$ şi $f(a + 1)$ sînt numere impare, atunci f nu are rădăcini întregi.

72. Fie f un polinom cu coeficienţi întregi. Presupunem că f ia valoarea $+1$ pentru cel puţin patru numere întregi distincte. Atunci pentru orice $a \in \mathbf{Z}$,

$f(a) \neq -1$. Afirmația rămîne adevărată dacă f ia valoarea $+1$ pentru numai trei numere întregi distincte?

73. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă există cel puțin patru numere întregi distincte a, b, c, d astfel încît $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 12$, atunci $f(k) \neq 17$, $(\forall) k \in \mathbf{Z}$.

74. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă există cel puțin patru numere întregi a, b, c, d distincte, astfel încît:
$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$, să se arate că:

$$f(k) \neq 1, 3, 5, 9, 11 \ (\forall)\, k \in \mathbf{Z}.$$

75. Să se rezolve ecuațiile, știind că admit rădăcini independente de m:
a) $x^4 + mx^3 + (2m + 3)x^2 + 3mx + 6m = 0$, $m \in \mathbf{R}$;
b) $x^4 + 2x^3 + (m - 1)x^2 - 2x - m = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

76. Fie ecuația $x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuația de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă:

a) $y_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{x^3 + x_1}{x_2}$, $y_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_3}$;

b) $y_1 = \dfrac{x_2x_3}{x_1} + 1$, $y_2 = \dfrac{x_1x_3}{x_2} + 1$, $y_3 = \dfrac{x_1x_2}{x_3} + 1$;

c) $y_1 = 1 + \dfrac{1}{x_1^2}$, $y_2 = 1 + \dfrac{1}{x_2^2}$, $y_3 = 1 + \dfrac{1}{x_3^2}$;

d) $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$;

e) $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$, $y_3 = x_1x_2$;

f) $y_1 = \dfrac{1}{x_2 + x_3}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_1 + x_3}$, $y_3 = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$.

77. Fie ecuația $x^3 - 3x + 1 = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuația de gradul 3 care are rădăcinile y_1, y_2, y_3, unde:
a) $y_1 = x_2 + x_3 + kx_1$, $y_2 = x_1 + x_3 + kx_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + kx_3$;
b) $y_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $y_2 = x_2^2 - x_1x_3$, $y_3 = x_3^2 - x_1x_2$;
c) $y_1 = x_2^2 + x_3^2$, $y_2 = x_1^2 + x_3^2$, $y_3 = x_1^2 + x_2^2$.

78. Fie ecuația $x^3 - px + q = 0$. Să se calculeze în funcție de p și q expresia

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_2^2}.$$

79. Fie ecuația $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$. Să se calculeze: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației.

80. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2x^4 - x^3 - 39x^2 + 18x + 54 = 0$, dacă $x_1 = 3\sqrt{2}$;
b) $6x^4 + x^3 + 52x^2 + 9x - 18 = 0$, dacă $x_1 = 3i$;
c) $15x^4 + 23x^3 + 544x^2 + 828x + 144 = 0$, dacă $x_1 = 6i$;
d) $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - mx + n = 0$, $m,n \in \mathbf{R}$, dacă $x_1 = 2 + i$;
e) $2x^6 - x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 9x - 9 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{2} + i$;
f) $x^5 - 56x^4 - 10x^3 + 560x^2 + x - 56 = 0$, dacă $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$;
g) $x^4 - (63 - 64\sqrt{3})x^3 - (65 + \sqrt{3})x^2 - (63 - \sqrt{3})x + 64 + 64\sqrt{3} = 0$, dacă $x_1 = 1 + \sqrt{3}$;

h) $3x^3 + (3i - 4)x^2 - (4i - 1)x + i = 0$, dacă $x_1 = -i$;

i) $x^3 - 2x^2 + nx + p = 0$, dacă $x_1 = 1 + \sqrt{2}$;

j) $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, dacă $x_1 = 1 + 2i$;

k) $x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0$, dacă $x_1 = -2 - \sqrt{3}$.

81. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p$. Să se determine m, n, p astfel ca f împărțit la $X - 1$ să dea restul -15, iar ecuația $f(x) = 0$ să aibă o rădăcină egală cu $-1 + i$.

82. Să se rezolve ecuațiile bipătrate:

a) $x^4 - (2m^2 - 1)x^2 + (m^2 - 6) = 0$;

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

c) $x^4 - 20x^2 + 96 = 0$; d) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$;

e) $x^4 - (2m + 1)x^2 + m^2 + m = 0$; f) $x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0$.

83. Să se rezolve ecuațiile reciproce:

a) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$; b) $4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = 0$;

c) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$; d) $2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0$;

e) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$; f) $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$.

84. Să se rezolve şi să se discute ecuația

$$x^6 - (m - 1)x^4 + (m - m^2)x^2 + 2m - m^2 = 0,\ m \in \mathbf{R}.$$

85. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$x^4 + x^3 + x^2 + mx + m^2 = 0,\ m \in \mathbf{R}.$$

86. Să se rezolve ecuația $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = ax^2$, $a \in \mathbf{R}$. Discuție.

87. Să se rezolve ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + acx + c^2 = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

88. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că ecuația în x, $(x + z)^n - (x + \bar{z})^n = 0$ are toate rădăcinile reale.

89. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ unde $a_i \in \mathbf{R}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Dacă $0 < a_0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, atunci oricare ar fi rădăcina α (reală sau complexă) a lui f, avem $|\alpha| \leqslant 1$.

90. Fie $Z[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți numere întregi. Fie p un număr întreg prim și $f, g \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă $p/fg \Rightarrow p/f$ sau p/g.

91. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Notăm cu $c(f)$ = cel mai mare divizor comun al coeficienților lui f. Dacă $f, g \in \mathbf{Z}[X]$ să se arate că $c(fg) = c(f) \cdot c(g)$.

92. *Criteriul lui Eisenstein:* Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n (n \geqslant 1)$ un polinom din $\mathbf{Z}[X]$ astfel încît $c(f) = 1$. Presupunem că există un număr prim p astfel încît p/a_i, $(\forall)0 \leqslant i \leqslant n-1$, p nu divide pe a_n şi p^2 nu divide pe a_0. Atunci f nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

93. Dacă p este nu număr prim, polinomul $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

94. Să se arate că polinomul $X^{52} + X^{51} + X^{50} + \ldots + X^2 + X + 1$ nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

95. Să se arate că polinomul $X^n - 120$ $(n \geqslant 1)$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

96. Să se arate că polinomul $f = X^3 + pX^2 + pX + p$, unde p este un număr prim, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

97. Să se arate că polinomul $X^{2^n} + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

98. Să se determine numerele întregi a, b, astfel încît polinomul $X^4 + aX^2 + bX + 1$ să se descompună în produsul a două polinoame de grad mai mic decît patru, cu coeficienți numere întregi.

99. Să se arate că polinomul $f = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n) - 1$, unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt numere întregi distincte, nu poate fi scris ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

100. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ $(a, b, c \in \mathbf{Z})$ astfel încît $ac + bc$ este număr impar. Să se arate că acest polinom nu se poate scrie ca produsul a două polinoame cu coeficienți întregi.

101. Fie $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ numere complexe distincte și $c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}$ numere complexe arbitrare. Să se arate că polinomul

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i(X - a_1)(X - a_2)...(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})...(X - a_{n+1})}{(a_i - a_1)(a_i - a_2)...(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})...(a_i - a_{n+1})}$$

este unicul polinom de grad $\leqslant n$ astfel încît

$$f(a_i) = c_i, \quad (\forall)\, i = 1, 2, ..., n + 1.$$

102. Fie $f_0, f_1, f_2, ..., f_n$ polinoame cu coeficienți complecși, astfel încît grad $f_i = i$, $(\forall) 0 \leqslant i \leqslant n$.

a) Dacă f este un polinom din $\mathbf{C}[X]$ astfel încît grad $f \leqslant n$, atunci există în mod unic numerele complexe $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ astfel încît $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$;

b) Dacă $f \in \mathbf{C}[X]$ și $a \in \mathbf{C}$, să se arate că f este de forma

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{X - a}{1!} + \alpha_2 \frac{(X - a)^2}{2!} + ... + \alpha_n \frac{(X - a)^n}{n!}, \text{ unde } \alpha_i \in \mathbf{C}.$$

103. Fie $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ numere complexe distincte două cîte două și $c_1, c_2, ..., c_{n+1}$ numere complexe arbitrare. Să se arate că există un unic polinom f de grad $\leqslant n$ și de forma

$f = \alpha_0 + \alpha_1(X - a_1) + \alpha_2(X - a_1)(X - a_2) + ... + \alpha_n(X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$ astfel încît $f(a_i) = c_i$, $(\forall)\ 1 \leqslant i \leqslant n + 1$.

104. Fie $f \in \mathbf{C}[X]$, un polinom de grad n, astfel încît $f(0), f(1), ..., f(n)$ sînt numere întregi. Să se arate că $(\forall)\ k \in \mathbf{Z}$, $f(k) \in \mathbf{Z}$.

PERMUTĂRI

1. Să se calculeze $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$ dacă:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze puterile $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$ în cazul că:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine permutarea $x \in S_4$ astfel încît

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze σ^{123}; σ^{210}; σ^{145}.

5. Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ să se calculeze σ^{100}; σ^{151}; σ^{651}.

6. Să se determine numărul de inversiuni şi signatura pentru fiecare din permutările următoare:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_4$, astfel încît $x^2 = u$.

8. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că nu există nici o permutare $x \in S_7$ astfel încît $x^2 = u$.

9. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_3$ astfel încît $x^2 = u$.

10. Fie permutarea $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $x \in S_4$ astfel încît $x^2 = u$.

11. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & i & 3 & j & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine i şi j astfel încît σ să fie o permutare pară.

12. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & i & 2 & 8 & j & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine i şi j astfel încît permutarea σ să fie impară.

13. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n & n+1 & n+2 \dots 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 \dots 2n-1 & 2n & 2n-2 \dots 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ. Să se determine n astfel încît σ să fie pară (respectiv impară).

14. Fie numărul de cinci cifre $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ unde: $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$. Să se calculeze suma $\sum\limits_{\sigma \in S_5} \overline{a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)} a_{\sigma(5)}}$.

15. Fie numărul 64251. Făcînd toate permutările posibile ale cifrelor acestui număr obţinem 120 numere distincte. Al cîtelea număr în ordinea crescătoare din cele 120 de numere ocupă numărul 64251?

16. Fie numărul 45251. Cîte numere distincte obţinem permutînd toate cifrele acestui număr? Să se calculeze suma tuturor acestor numere.

17. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ produsul

$$P_\sigma = \prod_{i=1}^{n} \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s} \right) \text{ este maxim?}$$

(r şi s sînt două numere naturale $\geqslant 1$).

18. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este minimă?

19. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)}$ este minimă?

20. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

a) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este maximă?

b) Pentru ce permutare $\sigma \in S_n$ suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este minimă?

21. Se dau numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ astfel încît să avem

$$a_1 a_{\sigma(1)} < a_2 a_{\sigma(2)} < \ldots < a_n a_{\sigma(n)}.$$

22. Să se determine toate permutările $\sigma \in S_n$ care au două inversiuni precum și numărul lor.

23. Să se arate că orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziţii de forma: $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), \ldots, (1\ n)$.

24. Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Capitolul XV
MATRICE

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $f(X) = X^2 + 2X + I_3$; să se calculeze $f(A)$.

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Dacă $f(X) = 2X^2 - 5X + I_2$, să se calculeze $f(A) + f(B)$ şi $f(A + B)$.

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

7. Fie matricea A:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & e^x + 1 & e^{-x} + 1 \\ e^{-x} & 0 & 1 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

8. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$ Să se calculeze A^n.

9. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

10. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} A^k$.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} A^k$.

13. Să se găsească matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încît $X^2 - 4X + 13I_2 = 0$ unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine u şi v astfel încît $AX = XA$.

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ unde a este un număr real nenul. Să se determine a astfel încît egalitatea $A^n = A$ să aibă loc pentru un anumit număr natural n.

16. Să se afle matricea A, astfel încît $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Să se afle matricea A, astfel încît $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} l & m \\ p & q \end{pmatrix}$ şi a, b, c, d sînt în progresie aritmetică atunci $m - l$, $p - m$, $q - p$ sînt în progresie aritmetică

19. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se cer toate matricele X care au proprietatea $XA = AX$.

20. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} +1 & 8 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & 4 & +7 \\ 10 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$$

21. Fie $f(x) = x^2 - 4x + 4I_3$. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ să se determine a, astfel încît $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, avînd elementele numere naturale. Să se determine A, astfel încît să avem egalitatea $(1\ 2\ 4) \cdot A = (3\ 1\ 2)$.

23. Fie A o matrice de tipul (4,3) avînd elementele numere naturale. Să se determine această matrice, astfel încît să avem egalitatea: $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

24. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că: $i)$ $[A, A] = 0$; $ii)$ $[A, B] = -[B, A]$; $iii)$ $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$, $(\forall)\ A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

25. Cu notațiile din problema **24** să se arate că dacă $A, B, C, \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ atunci $[[A, B]^2, C] = 0$.

26. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Dacă $AB = BA$ oricare ar fi $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; să se arate că $A = aI_n$ unde I_n este matricea unitate.

27. Să notăm cu $\mathcal{M}$ mulțimea tuturor matricelor de tipul (m, n) în care toate elementele sînt numerele $+1$ sau -1 şi astfel încît produsul numerelor de pe fiecare linie şi din fiecare coloană să fie $+1$. Să se calculeze numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}$.

28. Oricare ar fi matricele $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ să se arate că

$$\sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} = 0.$$

29. Pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ de ordinul n, notăm $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ pe care o numim *urma matricei* A. Să se arate că:

1) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$;
2) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$, $(\forall) \alpha \in \mathbf{C}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$;
3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$;
4) $\mathrm{Tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ şi $(\forall) U$ inversabilă.

Capitolul XVI

DETERMINANȚI

1. Pornind de la definiția determinantului să se determine semnul următorilor termeni:

a) $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$; b) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$; c) $a_{16}a_{21}a_{32}a_{45}a_{53}a_{64}$; d) $a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}$

2. Să se determine i și j astfel încît termenul $a_{12}a_{2i}a_{34}a_{4j}a_{51}$ să intre cu semnul $+$ în dezvoltarea determinantului de ordinul 5.

3. Care dintre produsele următoare apar în dezvoltarea determinantului de ordinul 6.:

a) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{56}a_{62}$; b) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{51}a_{62}$; c) $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}a_{64}$.

4. Folosind numai definiția determinantului, să se determine coeficientul lui X^4 și X^3 în dezvoltarea următorului determinant:

$$\begin{vmatrix} 3X & -X & 1 & -1 \\ 1 & -2X & 2 & 1 \\ 3 & 2 & X & 4 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{vmatrix}$$

5. Folosind numai definiția determinantului, să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a & a \dots a \\ 0 & 2 & -a & a \dots a \\ 0 & 0 & 3 & -a \dots a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots n \end{vmatrix}$$

6. Folosind numai definiția determinantului, să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Folosind proprietățile determinanților să se demonstreze următoarele egalități:

a) $\begin{vmatrix} a-b & \alpha-\beta & p-q \\ b-c & \beta-\gamma & q-r \\ c-a & \gamma-\alpha & r-p \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd.$

8. a) Dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este nul.

b) Să se arate că există determinanți nenuli de ordinul n cu $n^2 - n + 1$ elemente egale.

9. Să se arate că dacă un determinant de ordin n are $n^2 - n + 1$ elemente nule, atunci determinantul este nul

10. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 4\alpha^2 & -5\alpha & 4x \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$

11. Se consideră $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \sin 2x & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Să se dezvolte determinantul, punînd rezultatul sub o formă mai simplă.

12. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

13. Să se arate că $\begin{vmatrix} \dfrac{2}{1+x^2} + 2 & \dfrac{2}{1+x^2} + 5 & \dfrac{2}{1+x^2} + 3 \\ -2x & 1 - 5x & -3x \\ 4 & 7 + x & 5 \end{vmatrix} = 0.$

14. Se consideră expresiile $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, $g(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ $h(x) = \sqrt{1 - \sin x}$. Să se arate că oricare ar fi tripletul $a, b, c \in [0, \pi/2]$ avem:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} = 0$$

15. Să se calculeze determinantul scriind rezultatul sub formă de produs:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}.$$

16. Să se arate că:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + x_1 & x_2 & x_3 \dots & x_n \\ x_1 & 1 + x_2 & x_3 \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 \dots & 1 + x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

17. Dacă numerele $\overline{a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n}}, \overline{a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n}}, \dots, \overline{a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn}}$ sînt divizibile la N atunci și determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ este divizibil cu } N.$$

18. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$

19. Dacă $p < m$, $\begin{vmatrix} C_m^0 & C_m^1 & \dots & C_m^p \\ C_{m+1}^0 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+p}^0 & C_{m+p}^1 & \dots & C_{m+p}^p \end{vmatrix} = 1.$

20. Fie ecuaţia algebrică $x^n + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_n = 0$ unde $a_2, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

ştiind că $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt rădăcinile ecuaţiei date.

21. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & a & h_b & h_c \\ 1 & b & h_c & h_a \\ 1 & c & h_b & h_a \end{vmatrix} = 0.$

unde a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi şi h_a, h_b, h_c sînt lungimile înălţimilor corespunzătoare.

22. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Să se arate că $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

23. Fie matricea pătratică de ordinul n, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ unde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Considerăm matricea $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ unde $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$ oricare ar fi $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$. Să se arate că $\det B = \overline{\det A}$.

24. Fie A, B două matrice pătratice de ordinul n, avînd elementele numere reale. Să se arate că

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

25. Fie matricea de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

i) Să se arate egalitatea

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0.$$

ii) Dacă există un $k \geq 2$ astfel incît $A^k = 0$, atunci $A^2 = 0$.

26. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $a_{ij} \in \mathbf{R} (\forall) i, j = 1, 2, \dots, n$ şi

$$B = \begin{pmatrix} b & b & \dots & b \\ b & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Să se arate că pentru $n = 2,3$,

$$\det(A + B) \cdot \det(A - B) \leq (\det A)^2.$$

27. Fie $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{C})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{C})$. Notăm $M = AB$, $N = BA$. Presupunem că $\det M \neq 0$, $\det N \neq 0$ și $M^2 = kM$ unde $k \neq 0$. Să se determine $\det N$ în funcție de k.

28. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = \max(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Să se calculeze $\det A$.

29. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = \min(i, j)$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Să se calculeze $\det A$.

30. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ o matrice de ordinul n, definită astfel:

$a_{ij} = | i - j |$ oricare ar fi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Să se calculeze $\det A$.

31. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sînt -1 și $+1$. Să se arate că:

a) $\det A$ este un număr par;

b) să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.

32. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sînt 0 și 1. Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.

Capitolul XVII
RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

1. Să se calculeze rangul matricelor:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ -5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & -12 & 10 & -7 & -1 \\ 15 & 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & 17 \\ 4 & 12 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -7 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze rangul matricelor următoare, pentru diferite valori ale parametrilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \alpha-1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 & -4 & 5 \\ \alpha & \alpha & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \beta & 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 2 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 2 & 1 \\ \alpha & 1-2\beta & 3 & 1 \\ \alpha & -\beta & \beta+3 & 2\beta-1 \end{pmatrix}$.

3. a) Cum se poate schimba rangul unei matrice, dacă se schimbă unul dintre elementele sale?

b) Cum se poate schimba rangul unei matrice, prin schimbarea elementelor unei linii? Dar prin schimbarea elementelor a k linii?

4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Dacă A^* este matricea adjunctă a matricei A, să se arate că:

$$(A \cdot A^*)^n = (A^* \cdot A)^n = A^n(A^*)^n = (A^*)^n A^n, \quad (n \in \mathbf{N}).$$

5. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că matricea A este inversabilă dacă și numai dacă este nenulă. În acest caz să se calculeze inversa sa.

6. Să se afle dacă matricele următoare sînt inversabile şi în caz afirmativ să se găsească inversele lor:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{C}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ -i & 0 & i & i \\ -i & -i & 0 & i \\ -i & -i & -i & 0 \end{pmatrix}$.

7. Să se afle dacă matricele următoare, de ordin n, sînt inversabile şi în caz afirmativ să se găsească inversele lor:

a) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

8. Să se arate că pentru o matrice nesingulară A de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

inversa sa $B = A^{-1}$ este de forma

$$B = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Fie A o matrice pătratică cu coeficienţi complecşi. Să se demonstreze că, dacă există $k \geqslant 2$ astfel încît $A^k = 0$, atunci matricea $I - A$ este inversabilă şi avem:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

10. Fie A o matrice inversabilă cu coeficienţi complecşi. Să se demonstreze că

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

11. Fie A, B, C matrice astfel încît $AB = AC$. Sînt oare egale matricele B și C? Dar dacă A este o matrice pătratică nesingulară?

12. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ se numește involutivă dacă $A^2 = I_n$. O matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ se numește idempotentă dacă $B^2 = B$. Să se arate că:

a) Dacă B este o matrice idempotentă, atunci matricea $2B - I_n$ este involutivă;

b) Dacă matricea A este involutivă, atunci matricea $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

13. Fie E_n matricea pătratică de ordin n ale cărei elemente sînt toate egale cu 1. Să se arate că:

a) $E_n^2 = nE_n$; b) $I_n - E_n$ este inversabilă și avem.

$$(I_n - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} E_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n.

14. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ de rang 1. Să se arate că:

a) Există numerele $b_1, b_2, \ldots, b_m$ și $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel încît oricare ar fi $i, j (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ să avem $a_{ij} = b_i c_j$.

b) Matricea A se poate scrie ca produsul XY a două matrice X, Y, unde $x \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{C})$, iar $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{C})$.

15. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang 1. Să se arate că:

a) există un număr α astfel încît $A^2 = \alpha A$;

b) dacă $\alpha \neq -1$, atunci matricea $I_n + A$ este inversabilă și avem:

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha + 1} A.$$

Să se deducă de aici, în particular, problema 5.

16. Fie A o matrice nesingulară și $B = XY$, o matrice de rang 1 (vezi problema 6). Să se demonstreze că dacă matricea $A + B$ este nesingulară, inversa sa este dată de formula.

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha + 1} A^{-1}BA^{-1},$$

unde $\alpha = YA^{-1}X$.

Presupunînd cunoscute matricele A^{-1}, X, Y, să se calculeze numărul înmulțirilor și împărțirilor necesare pentru a trece de la A^{-1} la $(A + B)^{-1}$.

17. Fie A o matrice nesingulară de ordinul n și $\bar{A}$ matricea care se obține adăugînd la un element a_{ij} al lui A, numărul α. Să se arate că $\bar{A}$ este nesingulară și să se determine inversa sa în funcție de elementele matricei A^{-1} și numărul α.

18. Fie A o matrice nesingulară de ordin n, iar $\bar{A}$ matricea obținută adăugînd $a \in \mathbf{C}$ la fiecare element al său. Să se arate că matricea $\bar{A}$ este inversabilă și să se determine inversa sa în funcție de elementele matricei A^{-1} și numărul a.

19. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

f) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (3 \quad 2 \quad 1)$;

g) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1-i \end{pmatrix} = (10 \quad 20 \quad 30)$;

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Capitolul XVIII

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații cu ajutorul regulii lui Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13\alpha, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -26\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 13\alpha; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 16\alpha, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 14\alpha, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 30\alpha, \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = \alpha, \end{cases}$

unde α este un parametru real.

2. Să se afle valorile lui λ pentru care sistemele următoare au soluții nenule și în acest caz să se rezolve:

a) $\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x + (1 + \lambda)y + z + t = 0, \\ x + y + (2 + \lambda)z + t = 0, \\ x + y + z + t = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 0, \\ x + y + \lambda z = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y + z - 2t = 0, \\ 2x - 5y - 4z + 2t = 0, \\ 5x + 3y - 3z + 4t = 0, \\ 2x - \lambda y - 2z = 0. \end{cases}$

3. Să se decidă dacă sistemele următoare sînt compatibile și în acest caz să se rezolve;

a) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x + y - 2z = \alpha, \\ x + y + z = 3, \\ x + 2y - 3z = 1; \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$;

c) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 3z = -1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z + t = 10, \\ x + y - z - 2t = -8 \\ 5x + 5y - z - 4t = -4, \\ x + y + 3z + 4t = 28. \end{cases}$

4. Să se determine relația dintre parametrii a și b, pentru care sistemul următor este compatibil`

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0, \\ x + y - 4ab = 0, \\ (a^2 + 1)x - (2ab + 1)y + b = 0. \end{cases}$$

5. Să se rezolve sistemele următoare. Discuţie, după parametrii reali α şi β.

a) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ (\alpha + 1)x_1 + (\beta + 1)x_2 + 2x_3 = 7; \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha\beta x_2 + x_3 = \beta, \\ x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \beta, \\ (2 - \alpha)x_1 + (1 + \alpha)x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \alpha\beta, \\ x_1 + (3 - \alpha)x_2 + (2 + \alpha)x_3 + 3x_4 = \beta, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (8 + \alpha)x_4 = (2 + \alpha)\beta. \end{cases}$

6. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca suma a două soluţii ori produsul unei soluţii printr-un număr $\alpha \neq 1$ să fie din nou o soluţie a aceluiaşi sistem de ecuaţii liniare.

7. Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca o combinaţie liniară dată de soluţii oarecare ale unui sistem neomogen de ecuaţii liniare, să fie din nou o soluţie a acestui sistem.

8. a) Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

să aibă soluţie unică.

b) Aceeaşi problemă pentru sistemul

$$a_ix + b_iy + c_i = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

9. a) Să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0, \end{cases}$$

să aibă soluţie unică.

b) Aceeaşi problemă pentru sistemul

$$a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

10. Dacă $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$, să se găsească condiţii necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x = by + cz + du + ev, \\ y = cz + du + ev + ax, \\ z = du + ev + ax + by, \\ u = ev + ax + by + cz, \\ v = ax + by + cz + du \end{cases}$$

să aibă soluţii nenule.

11. Să se găsească condiții necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali

$$\begin{cases} \alpha x + ay + bz + ct = 0, \\ ax - \alpha y - fz + et = 0, \\ bx + fy - \alpha z - dt = 0, \\ cx - ey + dz - \alpha t = 0 \end{cases}$$

să aibă soluții nenule.

12. Se consideră sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} mx + \quad y + \quad z = 4, \\ \quad x + 2my + \quad z = 4, \\ \quad x + \quad y + mz = 3, \end{cases}$$

unde m este un parametru real. Se cere:

a) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

b) Să se determine valorile lui m pentru care soluția sistemului (x, y, z) satisface condițiile $x + z > y$ și $x + y \geqslant z$.

c) Să se determine valorile lui m pentru care soluția (x, y, z) a sistemului are componente pozitive.

13. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice oarecare. Se numește *polinom caracteristic* al matricei A, polinomul $P_A(X) = \det(XI_n - A)$. Numărul λ se numește *valoare proprie* a matricei A dacă ecuația $Ax = \lambda x$ are soluții nenule. Orice soluție nenulă $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ a acestei ecuații se numește *vector propriu* al matricei A (corespunzător valorii proprii λ).

Să se arate că numărul λ este o valoare proprie a matricei A dacă și numai dacă este rădăcină a polinomului caracteristic.

14. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Fie $A \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ o matrice, ale cărei valori proprii sînt: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Fie, de asemenea, $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k$ și notăm $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k$. Să se arate că $\det(f(A)) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$.

16. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice ale cărei valori proprii le presupunem cunoscute. Să se determine valorile proprii ale matricelor:

a) A^{-1} (dacă există); b) A^2; c) A^k, pentru k număr natural;

d) $a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$;

17. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice. Să se arate că dacă x este un vector propriu, atunci x este, de asemenea, vector propriu al matricelor:

a) A^{-1} (dacă există); b) A^2; c) A^k, pentru k număr natural;

d) $a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_k$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$;

Capitolul XIX
LEGI DE COMPOZIŢIE. GRUPURI

1. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$ astfel,

$$x * y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că această lege de compoziţie este asociativă, comutativă şi are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

2. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $\circ$ astfel,

$$x \circ y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că această lege de compoziţie este asociativă, comutativă şi are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

3. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$ prin

$$x * y = 2x + y, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se studieze proprietăţile acestei legi de compoziţie;

b) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$, să se calculeze: $a_2 = a * a$, $a_3 = a_2 * a$ şi în general, $a_k = a_{k-1} * a$. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$, număr natural, avem $a_n = (2^n - 1)\, a$.

4. Pe mulţimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziţie $*$, punînd

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ pentru orice } x, y \in [0, +\infty).$$

a) Să se studieze proprietăţile acestei legi de compoziţie.

b) Să se arate că înmulţirea numerelor reale este distributivă faţă de aceasta.

c) Să se afle x, dacă

$$2 * x = 3.$$

5. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $\perp$, prin:

$$x \perp y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se studieze proprietăţile acesteia.

6. Pe mulţimea $[0, +\infty)$ definim legea de compoziţie $\top$ astfel

$$x \top y = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Să se studieze proprietăţile acesteia.

7. Fie $a > 0$ un număr real fixat şi $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 \leqslant x \leqslant a\}$. Definim pe A o lege de compoziţie $\circ$ astfel

$$x \circ y = \frac{x + y}{1 + xy/a^2}.$$

Să se demonstreze că:

i) legea de compoziţie este asociativă;

ii) dacă $x, y, z \in A$ şi $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$.

8. Pe mulţimea $M = \{1,2,3,4\}$ definim legea de compoziţie $*$, prin $a * b = c \Leftrightarrow c$ este restul împărţirii lui a^b la 5.

a) Să se asocieze tabelul de definiţie al acesteia;

b) Să se studieze proprietăţile legii de compoziţie.

9. Fie A o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie, notată multiplicativ, astfel incît;

i) dacă $a, b, c \in A$ şi $ab = c$, atunci $ac = b$;

ii) $aa = a$, oricare ar fi $a \in A$.

Să se arate că:

a) oricare ar fi $a, b \in A$, ecuaţia $ax = b$ are soluţie unică în A;

b) dacă A este finită şi $ab \neq b$ oricare ar fi $b \neq a$, atunci aceasta are un număr impar de elemente.

10. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale, definim legea de compoziţie $*$, punînd:

$$x * y = ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se determine a, b, c astfel încît legea să fie comutativă şi asociativă.

11. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$, prin:

$$x * y = xy + ax + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

a) Ce relaţie există între a, b, c pentru ca legea să fie asociativă?

b) Legea $*$ este asociativă $\Leftrightarrow$ are element neutru.

c) Există elemente nesimetrizabile?

12. Pe mulţimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale, definim următoarele două legi de compoziţie:

$$m \perp n = \text{c.m.m.d.c. } \{m, n\} \text{ şi } m \top n = \text{c.m.m.m.c. } \{m, n\}.$$

oricare ar fi $m, n \in \mathbf{N}$.

Să se studieze proprietăţile acestor legi de compoziţie. Să se arate că:

$$m \perp (n \top p) = (m \perp n) \top (m \perp p),$$
$$m \top (n \perp p) = (m \top n) \perp (m \top p),$$

oricare ar fi $m, n, p \in \mathbf{N}$.

13. Pe mulţimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi definim următoarele două legi de compoziţie:

$$a \top b = \max \{a, b\} \text{ şi } a \perp b = \min \{a, b\},$$

oricare ar fi a $b \in \mathbf{Z}$.

Să se studieze proprietăţile acestor legi de compoziţie. Să se arate că:

$$a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c),$$
$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$

oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

14. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim două legi de compoziţie $*$ şi $\circ$, punînd

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \text{ şi } x \circ y = x + y + 1, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se studieze proprietăţile acestor două legi de compoziţie.
b) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x * y = -1, \\ x \circ y = 0. \end{cases}$$

15. Fie α, β unghiuri măsurate în radiani. Pe mulţimea **R** a numerelor reale, definim legea de compunere $*$, prin:

$$x * y = x \cos^2\alpha + y \cos^2\beta \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}$, avem:

$$(x * y) + z = (x + z) * (y + z) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ sau } |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}.$$

16. Fie M o mulţime cu n elemente. Cîte legi de compoziţie se pot defini pe M? Cîte sînt comutative dintre acestea? Cîte au element neutru?

17. Pe mulţimea **C** a numerelor complexe, definim legea de compoziţie $\top$, prin

$$z_1 \top z_2 = iz_1 \cdot z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\top$, iar $\mathbf{C}^*$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

18. Pe mulţimea **R** a numerelor reale, definim legea de compoziţie $*$, punînd

$$x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $*$, iar $\mathbf{R}_1$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

19. Pe mulţimea **C** a numerelor complexe definim legea de compoziţie $\circ$, prin:

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2, \text{ oricare ar fi } z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C} \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\circ$, iar $\mathbf{C}_1$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.
Să se calculeze în acest grup

$$i \circ i \circ i \circ i \circ i \text{ şi } i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i.$$

20. Pe mulţimea $(0, +\infty)$ definim legea de compoziţie $\perp$, prin:

$$x \perp y = x^{\ln y}, \text{ oricare ar fi } x, y \in (0, +\infty).$$

Să se arate că mulţimea $A = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\perp$, iar A cu operaţia indusă este un grup comutativ.

21. Pe mulţimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziţie $\circ$, punînd:

$$x \circ y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{R}_1 \setminus \mathbf{R} \setminus \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\circ$, iar $\mathbf{R}_1$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

22. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$, prin:

$$x * y = 2(x + y - 1) - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă faţă de legea $*$, iar $\mathbf{R}_2$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

23. Pe mulţimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raţionale definim legea de compoziţie $\circ$, prin:

$$x \circ y = x + y - \frac{xy}{2}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{Q}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă faţă de legea $\circ$, iar $\mathbf{Q}_2$ cu operaţia indusă este un grup comutativ.

24. Fie k un număr natural şi $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

Să se determine toate numerele naturale k astfel încît $a^2 - kb^2 = 1$ şi H să fie parte stabilă.

25. Să se arate că mulţimea $G = \left\{\begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{pmatrix} \mid x \neq 0,\ x^2 - 2y^2 = 1\right\}$ împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează un grup comutativ.

26. Fie mulţimea

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}.$$

Să se arate că G împreună cu înmulţirea matricelor este un grup necomutativ.

27. Există grupuri necomutative G, avînd proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in G$, $x^2y^2 = y^2x^2$?

28. Fie G un grup necomutativ. Dacă $a, b \in G$ astfel încît $a^{-1}ba = b^{-1}$ şi $b^{-1}ab = a^{-1}$, atunci $a^2b^2 = b^2a^2 = e$, $a^2 = b^2$ şi $a^4 = b^4 = e$.

29. Fie G un grup, notat multiplicativ, astfel încît oricare ar fi $a, b \in G$ să avem $(ab)^2 = a^2b^2$. Să se arate că G este comutativ.

Să se studieze comutativitatea unui grup $(G, *)$ cu proprietatea că $(a * b)^3 = a^3 * b^3$, oricare ar fi $a, b \in G$.

30. Pe mulţimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ definim legile de compoziţie $\top$, $\perp$, în modul următor:

dacă $x = (m, a)$ şi $y = (m, b)$, atunci $x \top y = (m + n, ab)$ şi $x \perp y = (mn, a + b)$.

a) Să se studieze proprietăţile fiecăreia dintre legile definite.

b) Să se descrie elementele simetrizabile.

c) Să se studieze distributivitatea legii $\perp$ faţă de $\top$.

31. Fie n un număr întreg fixat şi

$$G = \{a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z};\ n \mid a \text{ şi } n \mid b\}.$$

Definim pe G următoarea lege de compoziţie

$$(a, b) * (a', b') = (aa' + bb', aa' - bb'), \text{ oricare ar fi } (a, b), (a', b) \in G.$$

Să se decidă dacă G împreună cu această operaţie formează un grup.

32. Fie mulţimea

$$M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Să se arate că M împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor este un grup comutativ, izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi.

33. Fie mulţimea

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}\right\}.$$

Să se arate că G împreună cu înmulţirea matricelor este un grup, izomorf cu grupul S_3 al permutărilor de 3 elemente.

34. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze puterile: $A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots$

b) Să se decidă dacă A este inversabilă.

c) Să se arate că mulţimea

$$G = \{A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$$

formează un grup izomorf cu grupul multiplicativ

$$H = \left\{\cos\frac{2k\pi}{5} + i \sin\frac{2k\pi}{5}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 5\right\}.$$

35. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie $*$ astfel $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, n fiind un număr natural impar.

Să se arate că $(\mathbf{R}, *)$ este un grup. Mai mult dacă $(\mathbf{R}, +)$ este grupul aditiv al numerelor reale, să se arate că funcţia

$$f\colon (\mathbf{R}, +) \to (\mathbf{R}, *), \quad f(a) = \sqrt[n]{a}$$

este un izomorfism de grupuri.

36. a) Fie $G_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Să se arate că G_1 cu înmulţirea matricelor formează un grup comutativ.

b) Fie $G_2 = \{1, -1, i, -i\}$. Să se arate că G_2 cu înmulţirea numerelor formează un grup.

c) Fie $G_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Să se arate că G_3 cu compunerea permutărilor formează un grup comutativ.

d) Să se arate că grupurile G_1, G_2 şi G_3 sînt izomorfe.

37. Să se arate că grupurile aditive $(\mathbf{Z}, +)$ şi $(\mathbf{Q}, +)$ nu sînt izomorfe.

38. Să se arate că grupurile aditive $(\mathbf{Q}, +)$ şi $(\mathbf{R}, +)$ nu sînt izomorfe.

39. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ și $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nu sînt izomorfe.

40. Fie G o mulțime nevidă înzestrată cu o operație asociativă (notată multiplicativ). Să se arate că G este grup $\Leftrightarrow$ ecuațiile $ax = b$, $ya = b$ au soluții în G, pentru orice $a, b \in G$.

41. Fie G o mulțime finită pe care este definită o lege de compoziție asociativă, notată multiplicativ. Dacă operația are proprietatea că, $xy = xz \Rightarrow y = z$ și $yx = zx \Rightarrow y = z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$, atunci G este grup.

42. Fie $(\mathbf{R}, +)$ grupul aditiv al numerelor reale, iar $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule. Definim funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$$

prin $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. Să se arate că:

a) f este omomorfism de grupuri;

b) $\mathbf{Z} = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 1\}$;

c) $\operatorname{Im} f = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$;

43. Fie G mulțimea tuturor șirurilor $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, unde $x_i \in \mathbf{R}$. Definim pe G operația $*$, astfel:

Dacă $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$; $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in G$, atunci

$$x * y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots)$$

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

b) Definim funcțiile f, g, h, k de la G la G, astfel:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_3, x_5, \ldots); \quad g(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_4, x_6, \ldots);$$
$$h(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots); \; k(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)$$

Să se arate că f, g, h, k sînt omomorfisme de grup.

c) Să se arate că $f \circ h = g \circ k = 1_G$, $g \circ h = f \circ h = 0$.

44. Fie $(\mathbf{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi. Să se arate că:

a) dacă $n \in \mathbf{Z}$, funcția $\varphi_n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\varphi_n(x) = nx$, este un omomorfism de grupuri;

b) orice omomrfism de grupuri de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$ este de acest tip;

c) există printre acestea doar două izomorfisme.

45. Fie G un grup comutativ și să notăm cu H mulțimea

$$H = \{f \mid f : \mathbf{Z} \to G, f \text{ omomorfism de grupuri}\}.$$

Să se arate că funcția

$$\varphi : H \to G, \; \varphi(f) = f(1)$$

este o bijecție.

În particular, să se afle omomrfismele de grup de la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$.

46. Fie $(\mathbf{Q}, +)$ grupul aditiv al numerelor raționale. Să se arate că:

a) dacă $q \in \mathbf{Q}$, funcția $\psi_q : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, $\psi_q(x) = qx$, este un omomorfism de grupuri;

b) Orice omomorfism de grupuri de la $\mathbf{Q}$ la $\mathbf{Q}$ este de acest tip.

47. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este cel nul.

48. Să se arate că singurul omomorfism de grupuri de la grupul aditiv $(\mathbf{Z}_n, +)$ la grupul aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este cel nul.

49. Fie $\mathbf{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{m-1}\}$ și $\mathbf{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ grupurile aditive ale claselor de resturi modulo m, respectiv n. Fie mulțimile:

$A = \{f \mid f : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n, f$ omomorfism de grupuri$\}$ și
$B = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in \mathbf{Z}_n, m\bar{a} = \bar{0}\}$. Să se arate că:

a) dacă $f \in A$, atunci $f(\hat{1}) \in B$;

b) funcția $\varphi: A \to B$, $\varphi(f) = f(\hat{1})$, este bijectivă;

c) cîte omomorfisme de grupuri de la $\mathbf{Z}_m$ la $\mathbf{Z}_n$ există?

50. Fie S_n grupul permutărilor de n elemente și $A_n \subset S_n$ mulțimea permutărilor pare de n elemente. Să se arate că A_n este un subgrup al lui S_n și să se determine ordinul său.

51. Fie G un grup cu legea notată multiplicativ și $H \subset G$ o submulțime finită nevidă a sa astfel încît, oricare ar fi $x, y \in H$ să avem $xy \in H$. Să se arate că H este un subgrup al lui G.

52. Fie H un subgrup al grupului G și $a \in G$ un element oarecare. Să se arate că mulțimea $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ este un subgrup al lui G.

53. Fie G un grup și H, K două subgrupuri ale sale. Atunci $H \cup K$ este subgrup $\Leftrightarrow$ $H \subset K$ sau $K \subset H$.

54. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că mulțimea

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \text{ oricare ar fi } x \in G\}$$

este un subgrup al lui G. ($Z(G)$ se numește centrul grupului G).

55. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $x, y \in G$. Dacă $xy \in Z(G)$, atunci $xy = yx$.

56. Fie S_n grupul tuturor permutărilor de gradul n. Dacă $b \geqslant 3$, să se arate că $Z(S_n) = \{e\}$ (e fiind permutarea identică).

57. Fie A_n grupul permutărilor pare de grad n. Dacă $n \geqslant 4$, să se arate că $Z(A_n) = \{e\}$.

58. Fie n un număr natural oarecare și notăm cu

$$n\mathbf{Z} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Să se arate că:

a) $n\mathbf{Z}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$;

b) orice subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$ este de acest tip.

59. Fie $m, n \in \mathbf{Z}$. Să se arate că:

a) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = \{mk + nl \mid k, l \in \mathbf{Z}\}$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Z}, +)$. De asemenea, $m\mathbf{Z} \cap n\mathbf{Z}$ este un subgrup al lui $(\mathbf{Z}, +)$.

b) $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} = (m, n)\,\mathbf{Z}$ și $m\mathbf{Z} \cap n\mathbf{Z} = [m, n]\mathbf{Z}$, unde (m, n) respectiv $[m, n]$ este *c.m.m.d.c.*, respectiv *c.m.m.m.c.*, al numerelor m și n.

60. Fie G un grup finit cu legea de compoziție notată multiplicativ și H un subgrup al său. Pentru fiecare $a \in G$, notăm: $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Să se arate că:

i) Dacă $aH \cap bH \neq \varnothing$, atunci $aH = bH$;

ii) Oricare ar fi $a \in H$, aH și H au același număr de elemente.

61. (Teorema lui Lagrange.) Fie G un grup finit. Numărul de elemente al lui G se numeşte *ordinul* grupului şi se notează ord G. Folosind problema precedentă, să se arate că dacă H este un subgrup al lui G, atunci

$$\text{ord } H \mid \text{ord } G.$$

62. Fie G un grup finit şi $a \in G$ un element oarecare. Se numeşte *ordinul* elementului a, cel mai mic număr natural $n \neq 0$ astfel încît $a^n = e$ (e fiind elementul neutru al lui G). Notăm ordinul elementului a prin ord (a). Să se arate că:

i) Pentru orice $a \in G$, există ordinul său.

ii) Dacă m este un număr întreg astfel încît $a^m = e$, atunci ord $(a) \mid m$.

iii) Dacă $\text{ord}(a) = n$, atunci mulţimea

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$

este un subgrup al lui G.

iV) Oricare ar fi $a \in G$, atunci $\text{ord}(a) \mid \text{ord } G$.

63. Fie grupul abelian $(\mathbf{Z}_{120}, +)$. Să se găsească ordinul elementelor: $\widehat{25}, \widehat{30}, \widehat{55}, \widehat{45}, \widehat{80}$ ale acestui grup.

64. Fie G un grup multiplicativ, cu elementul neutru e.

a) Dacă $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$, să se arate că G este comutativ.

b) Dacă G are proprietatea că $x^3 = e$, oricare ar fi $x \in G$, rezultă că G este comutativ?

65. Fie G un grup finit de ordin par. Să se arate că există în G un element care are ordinul 2.

66. Fie G un grup comutativ (legea de compoziţie fiind notată multiplicativ) de ordinul n. Să se arate că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul elementelor de ordinul 2 ale lui G (în cazul că nu există elemente de ordinul 2, ultimul produs se consideră egal cu elementul neutru e).

67. Folosind problema precedentă, să se demonstreze teorema lui Wilson: Dacă p este un număr prim, atunci:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

68. Folosind problema **61**, cap. IV, să se demonstreze teorema lui Fermat: Dacă p este un număr prim şi $a \in \mathbf{Z}$,atunci

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

69. Fie G un grup finit şi $a, b \in G$ două elemente oarecare astfel încît $ab = ba$. Dacă $\text{ord}(a) = m$, $\text{ord}(b) = n$ şi $(m, n) = 1$, atunci $\text{ord}(ab) = mn$.

70. Fie grupurile aditive $\mathbf{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ şi $\mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ şi considerăm mulţimea $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n = \{(\bar{x}, \hat{y})\} \mid \bar{x} \in \mathbf{Z}_m, \hat{y} \in \mathbf{Z}_n\}$. Definim pe $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ operaţia definită prin:

$$(\bar{x}, \hat{y}) + (\bar{x}', \hat{y}') = (\overline{x + x'}, \widehat{y + y'}),$$

oricare ar fi $(\bar{x}, \hat{y}), (\bar{x}', \hat{y}') \in \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$. Să se arate că $(\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n, +)$ este un grup comutativ. Mai mult, dacă m şi n sînt prime între ele, atunci acest grup este izomorf cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_{mn}$.

71. Fie G un grup finit de ordin p, unde p este un număr prim. Să se arate că G este izomorf cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_p$.

72. Fie G un grup finit nu neapărat comutativ și $x, y \in G$. Să se arate că $\mathrm{ord}(xy) = \mathrm{ord}(yx)$.

73. *i*) Fie mulțimea $G = \{e, a, b, c\}$, înzestrată cu o lege de compoziție, definită prin următorul tabel

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup comutativ (numit grupul lui Klein);

ii) Să se arate că orice grup cu 4 elemente este izomorf fie cu grupul aditiv $\mathbf{Z}_4$, fie cu grupul lui Klein.

Capitolul XX

INELE ŞI CORPURI

1. Pe mulţimea $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) \mid x,y \in \mathbf{Z}\}$ definim două legi de compoziţie, prin:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
$$(x, y)(x', y') = (xx', xy' + x'y),$$

oricare ar fi $(x, y), (x', y') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Să se arate că în acest mod $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ devine un inel comutativ şi unitar.

2. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo n. Să se determine mulţimea:

$$N = \{\hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbf{Z}, \text{ există } k \in \mathbf{N} \text{ astfel încît } \hat{x}^k = 0\}.$$

Fie, de asemenea, $I = \{\hat{x} \mid x \in \mathbf{Z}_n$, există $k \in \mathbf{N}$ astfel încît $\hat{x}^k = \hat{x}\}$. Să se arate că $N \cap I = \{\hat{0}\}$.

3. Fie M o mulţime nevidă şi $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}$, mulţimea submulţimilor sale. Pe mulţimea $\mathcal{P}(M)$ definim două legi de compoziţie în felul următor:

$$A + B = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A),$$
$$A \cdot B = A \cap B,$$

oricare ar fi $A, B \in \mathcal{P}(M)$. Să se arate că $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este un inel comutativ şi unitar. Mai mult, oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(M)$, avem $A + A = 0$ (elementul neutru la adunare) şi $A^2 = A$. Să se studieze cazurile particulare în care M este formată din 1, 2, respectiv 3 elemente.

4. Fie A un inel necomutativ unitar şi $a \in A$ un element astfel încît există $a' \in A$ cu $a'a = 1$ şi $aa' \neq 1$. Fie, de asemenea, $M = \{b \in A \mid ba = 1\}$ şi $b_0 \in M$. Să se arate că funcţia $f\colon M \to M$, definită prin $f(b) = ab + b_0 - 1$ este injectivă, dar nu este surjectivă. În particular, să se deducă că M este infinită.

5. Dacă A este un inel astfel încît oricare ar fi $a \in A$, $a \neq 0$, există $b \in A$ cu $ba = 1$, atunci orice element nenul al lui A este inversabil (A este corp).

6. Fie A un inel comutativ cu unitate şi $f, g, \mathbf{Q} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A$, două omomorfisme de inele ($f(1) = g(1) = 1_A$). Dacă $f(n) = g(n)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$, atunci $f = g$.

7. Fie inelul $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$ şi $\hat{a} \in \mathbf{Z}$. Să se arate că $\hat{a}$ este inversabil $\Leftrightarrow (a,n) = 1$.

8. Fie A un inel. Definim pe A legea de compoziţie $\perp$, punînd:

$$x \perp y = x + y - xy, \text{ oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că legea $\perp$ este asociativă şi are element neutru.

Mai mult, dacă inelul A este unitar şi $1 - x$ ($x \in A$) este inversabil, atunci x este simetrizabil faţă de legea $\perp$.

9. Fie A un inel, pe care definim o nouă lege de compoziţie $*$, punînd

$$x * y = xy + yx, \text{ oricare ar fi } x, y \in A.$$

Să se arate că:

a) legea $*$ este comutativă, dar nu este asociativă;

b) legea $*$ este distributivă faţă de adunare;

c) $[(x * x) * y] * x = (x * x) * (y * x)$, oricare ar fi $x, y \in A$.

10. Să se arate că mulţimea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{C} \right\}$$

împreună cu legile obişnuite de adunare şi înmulţire a matricelor este un domeniu de integritate.

11. Fie inelul $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ şi $U(\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}))$ grupul multiplicativ al matricelor inversabile ale sale. Fie, de asemenea,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} n & 12 \\ a & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \leqslant 12 \right\}.$$

Să se determine cardinalul mulţimii $A \cap U(\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}))$.

12. Fie $d \in \mathbf{Z}$ un număr liber de pătrate (adică, nu există $p \in \mathbf{Z}$ astfel încît $p^2 \mid d$). Să se arate că:

a) mulţimea $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe este un inel comutativ şi unitar;

b) mulţimea $I = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix} \middle| \; m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor formează un inel comutativ şi unitar;

c) cele două inele de la punctele precedente sînt izomorfe;

d) dacă $d' \in \mathbf{Z}$ este un alt număr liber de pătrate, atunci inelele $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ şi $\mathbf{Z}[\sqrt{d'}]$ sînt izomorfe $\Leftrightarrow d = d'$.

13. Prin definiţie, un *inel boolean* este un inel în care $x^2 = x$, pentru orice element x (adică, orice element este idempotent). Să se demonstreze că într-un inel boolean înmulţirea este comutativă şi $x = -x$, oricare ar fi x din inel. Să se arate că dacă elementele u, x, y ale unui inel boolean sînt astfel încît $x = uxy$, atunci $x = ux$. Mai mult, dacă x şi y sînt elemente ale unui inel boolean şi $u = x + y + xy$, atunci $x = ux$ şi $y = uy$.

În general, să se arate că, pentru orice n elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale unui inel boolean, există un element u al inelului astfel încît $x_1 = ux_1$, $x_2 = ux_2, \ldots, x_n = ux_n$.

14. Fie A_1 şi A_2 două inele unitare şi fie adunarea şi înmulţirea pe $A_1 \times A_2$, definite astfel:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Să se arate că $A_1 \times A_2$, cu aceste operații, este un inel unitar care are divizori ai lui zero. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel în funcție de elementele inversabile ale inelelor A_1 și A_2.

A p l i c a ț i e.

a) $A_1 = A_2 = \mathbf{Z}$; b) $A_1 = \mathbf{Z}$, $A_2 = \mathbf{Q}$; c) $A_1 = \mathbf{Z}_m$, $A_2 = \mathbf{Z}_n$.

15. Fie $m, n > 1$, numere naturale prime între ele și inelele

$$\mathbf{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\},\ \mathbf{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\},\ \mathbf{Z}_{mn} = \{\overline{\overline{0}}, \overline{\overline{1}}, \ldots, \overline{\overline{mn-1}}\}.$$

Să se arate că:

a) Dacă $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, atunci $(\hat{x}, \overline{x}) = (\hat{y}, \overline{y})$;

b) Funcția $\varphi: \mathbf{Z}_{mn} \to \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, definită prin $\varphi(\overline{\overline{x}}) = (\hat{x}, \overline{x})$ este un izomorfism de inele (vezi pct. c) al problemei precedente).

16. Să se descrie omomorfismele de inel de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$.

17. Să se descrie omomorfismele de inel de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}_n$.

18. Să se descrie omormofismele de inel de la $\mathbf{Z}_m$ la $\mathbf{Z}_n$.

19. Fie ecuația $\hat{a}x = \hat{b}$, cu $\hat{a}, \hat{b}$ din inelul $\mathbf{Z}_n$ al claselor de resturi modulo n. Să se arate că:

i) Dacă $(a, n) = 1$, ecuația are o soluție unică;

ii) Dacă $(a, n) = d > 1$ și $d \nmid b$, ecuația nu are nici o soluție;

iii) Dacă $(a, n) = d > 1$ și $d \mid b$, atunci ecuația are d soluții distincte.

20. Fie A un inel comutativ și unitar, astfel încît să existe $u \in A$, $u \neq 0$ și $u \neq 1$, cu $u^2 = u$. Fie

$$A_1 = \{ux \mid x \in A\}.$$

Să se demonstreze că A_1 este un subinel al lui A (adică, oricare ar fi $x, y \in A$, atunci $x - y \in A_1$ și $xy \in A_1$) care are unitate. Să se demonstreze, apoi, că există un subinel A_2 al lui A astfel încît:

a) A_2 este unitar; b) fiecare element al lui A se exprimă ca $x_1 + x_2$ unde $x_i \in A_i$, $i = 1,2$; c) dacă $x_1 \in A_1$ și $x_2 \in A_2$, atunci $x_1x_2 = 0$; d) $A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Să se arate că funcția

$$f: A \to A_1 \times A_2,\ f(x) = (x_1, x_2),\ \text{unde } x = x_1 + x_2,$$

este un izomorfism de inele.

21. Fie A un inel și $\mathbf{Z}$ inelul numerelor întregi. Considerăm $A_1 = \mathbf{Z} \times A$ pe care definim adunarea și înmulțirea astfel:

$$(n, a) + (n', a') = (n + n', a + a'),$$
$$(n, a) \cdot (n', a') = (nn', na' + n'a + nn'),$$

pentru orice $(n, a), (n', a') \in A_1$. Să se arate că:

a) A_1 este un inel unitar;

b) A este izomorf cu un subinel al lui A_1;

c) dacă A este inel comutativ, atunci A_1 este comutativ. Pentru $x, y \in A$, fie

$$x \circ y = x + y - xy.$$

Să se arate că operația $\circ$ este asociativă și că $x \circ 0 = 0 \circ x = x$, pentru orice $x \in A$. Identificînd elementele corespunzătoare prin izomorfismul de la pct. b), să se arate că dacă $x \in A$, atunci x este simetrizabil în $(A, \circ)$ dacă și numai dacă $1 - x$ este simetrizabil în A_1.

22. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\text{a)} \begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1}, \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2}; \end{cases} \qquad \text{a)} \begin{cases} \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{2}, \\ \hat{4}x + \hat{6}y = \hat{3}, \end{cases}$$

cu coeficienți în inelul $\mathbf{Z}_{12}$.

23. Fie inelul $\mathbf{Z}[\mathrm{i}] = \{m + n\mathrm{i} \mid m,n \in \mathbf{Z}\}$ (numit inelul întregilor lui Gauss). Definim funcția

$$\varphi: \mathbf{Z}[\mathrm{i}] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + n\mathrm{i}) = m^2 + n^2.$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z,\ z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$;

c) Dacă $z,z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$, $z' \neq 0$, există $q,\ r \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ astfel încît $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$ (formula împărțirii cu rest);

d) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ este inversabil $\Leftrightarrow z \in \{-1,\ 1,\ -\mathrm{i},\ \mathrm{i}\}$.

24. Fie inelul $\mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}] = \{m + n\mathrm{i}\sqrt{2} \mid m,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Definim funcția

$$\varphi: \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + n\mathrm{i}\sqrt{2}) = m^2 + 2n^2.$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z,\ z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$;

c) Dacă $z,z' \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$, $z' \neq 0$, există $q,\ r \in \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$ astfel încît $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

d) $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ este inversabil $\Leftrightarrow z \in \{-1,\ 1\}$.

25. Fie inelul $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Definim funcția

$$\varphi: \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbf{N},\ \varphi(m + n\sqrt{2}) = |m^2 - 2n^2|.$$

Să se arate că:

a) $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

b) $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, oricare ar fi $z,\ z' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$;

c) dacă $z,z' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, $z' \neq 0$, există $q,\ r \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ astfel încît $z = z'q + r$, unde $\varphi(r) < \varphi(z')$;

d) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ are o infinitate de elemente inversabile.

26. Să se arate că $\mathbf{Z}_n$ este corp dacă și numai dacă n este prim.

27. Să se arate că orice inel integru finit este corp.

28. Să se arate că mulțimea

$$K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,\ b,\ c \in \mathbf{Q}\}$$

împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor reale este un corp comutativ.

29. Să se determine automorfismele corpului $\mathbf{Q}$ al numerelor raționale.

30. Să se determine automorfismele corpului $\mathbf{R}$ al numerelor reale.

31. Să se determine automorfismele f, ale corpului $\mathbf{C}$ al numerelor complexe, cu proprietatea că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

32. Fie $d \in \mathbf{Z}$ un număr liber de pătrate. Să se arate că:

a) mulţimea $\mathbf{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe este un corp comutativ;

b) mulţimea $K = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Q}\right\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor formează un corp comutativ;

c) cele două corpuri de la punctele precedente sînt izomorfe.

33. Fie K un corp comutativ şi $K^* = K \setminus \{0\}$. Să se arate că grupurile $(K, +)$ şi $(K^*, \cdot)$ nu sînt izomorfe.

34. Fie K un corp comutativ avînd proprietatea că, pentru orice $x \in K$ avem $x^2 + 1 \neq 0$. Definim adunarea şi înmulţirea pe $K \times K$, punînd

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

pentru orice $(x_1; y_1), (x_2, y_2) \in K \times K$.

Să se arate că mulţimea $K \times K$, împreună cu aceste operaţii, este un corp comutativ, corpul K fiind izomorf cu un subcorp al acestuia. Mai mult, în acest corp ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ are soluţii.

Există corpuri K finite cu proprietatea că $x^2 + 1 \neq 0$, oricare ar fi $x \in K$?

35. Să se determine rangul matricei.

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & -\hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{\alpha} & \hat{1} & -\hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{Z}_5).$$

Discuţie după $\alpha \in \mathbf{Z}_5$.

36. Să se determine $\alpha \in \mathbf{Z}_3$ astfel încît matricea

$$\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{\alpha} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\alpha} & \hat{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z}_3)$$

să fie inversabilă. În acest caz să se afle inversa.

37. Fie corpul $\mathbf{Z}_3$ şi mulţimea

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbf{Z}_3\right\}.$$

Să să arate că G împreună cu înmulţirea matricelor este un grup necomutativ. Cîte elemente are acest grup?

38. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \hat{2}x + y + z = \hat{4}, \\ x + y - z = \hat{0}, \\ \hat{4}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = \hat{1}, \\ \hat{2}x + \hat{3}y + z = \hat{1}, \\ -x - y + \hat{3}z = \hat{1}, \end{cases}$

cu coeficienţi în $\mathbf{Z}_5$.

39. Să se rezolve şi să se discute sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} (\hat{3}\alpha - \hat{2})x_1 + (\alpha - \hat{1})x_2 + (\alpha + \hat{4})x_3 + \alpha x_4 = \alpha - \hat{1}, \\ \alpha x_1 + (\alpha + \hat{4})x_2 + (\alpha - \hat{1})x_3 + (\alpha + \hat{3})x_4 = \alpha - \hat{1}, \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + (\hat{2}\alpha + \hat{1})x_3 + (\hat{2}\alpha - \hat{1})x_4 = \hat{1}, \end{cases}$$

cu coeficienţi în $\mathbf{Z}_5$.

40. Să se deducă în corpul $\mathbf{Z}_p$ ($p \neq 2$, număr prim) formula de rezolvare a ecuaţiei de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a,\ b,\ c \in \mathbf{Z}_p,\ a \neq 0).$$

41. Fie polinoamele:

a) $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$; b) $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$;

c) $X^5 + 1 \in \mathbf{Z}_3[X]$; d) $X^4 - 1 \in \mathbf{Z}_7[X]$.

Să se decidă dacă polinoamele date sînt sau nu reductibile, iar în caz afirmativ să se descompună în factori primi.

42. Să se determine a astfel încît polinomul

$$\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X] \text{ să fie ireductibil.}$$

43. Să se arate că polinomul $X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbf{Z}_7[X]$ este reductibil pentru orice $a \in \mathbf{Z}_7$.

44. Fie K un corp comutativ. Notăm cu $GL_n(K)$ mulţimea matricelor inversabile de ordinul n cu elemente din K. Să se arate că:

a) $GL_n(K)$ este un corp;

b) dacă K este un corp finit avînd q elemente, atunci $GL_n(K)$ are $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\ldots(q^n - q^{n-1})$ elemente;

c) $GL_2(\mathbf{Z}_2)$ este izomorf cu grupul S_3 al permutărilor de 3 elemente.

Capitolul XXI
PROBLEME PENTRU CONCURSURI DE MATEMATICĂ

1. Fie şirul de mulţimi şi funcţii:

$$\dots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_4} A_3 \xrightarrow{f_3} A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0.$$

Dacă mulţimile A_i sînt finite oricare ar fi $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$, există un şir de elemente $(x_n)_{n\geq 0}$, unde $x_n \in A_n (n \geqslant 0)$, cu proprietatea că $f_n(x_n) = x_{n-1}$, oricare ar fi $n > 1$.

2. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$, o funcţie cu proprietatea că (1) $f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in [0, 1]$.

Să se arate că $f \circ f = f$.

Să se dea exemplu de funcţie cu proprietatea (1) care să fie diferită de funcţia nulă şi de cea identică.

3. Fie a, b, α, β numere reale şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, o funcţie oarecare. Dacă $\alpha^2 \neq \beta^2$ să se determine funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît să avem

$$\alpha f(a + x) + \beta f(b - x) = g(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

4. Fie a_0 un număr natural. Definim mulţimea

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \text{ unde } a_1 = \sqrt{a_0^2 + 1}, \dots, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}.$$

Să se arate că mulţimea $A \setminus \mathbf{Q}$ este infinită.

5. Dacă n este un număr natural, să se arate că numărul

$$[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2] \text{ este impar.}$$

6. Să se determine mulţimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ şi } \sqrt{x^2 - x + 1} \in \mathbf{Z}\}.$$

7. Fie k un număr real. Să se determine valorile lui k, astfel încît ecuaţia

$$|x + 1| - |x - 1| = kx + 1$$

să aibă soluţie unică.

8. Dacă a, b, c sînt numere reale pozitive, astfel încît $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$, să se arate că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

9. Dacă $x + y + z = a, xy + yz + zx = b$, să se arate că

$$\max \{x, y, z\} - \min \{x, y, z\} \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{a^2 - 3b}.$$

10. Să se arate că, dacă $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, atunci $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$, m și $n\neq 0$ fiind numere naturale.

11. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încît $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Să se arate că

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}<\frac{a_{k+1}+\ldots+a_n}{n-k}.$$

12. Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural n, astfel încît

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leqslant n(x^4+y^4+z^4),$$

oricare ar fi numerele reale x, y, z.

13. Dacă $m < n$ sînt numere naturale nenule, să se calculeze

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\max(i, k).$$

14. Să se calculeze

$$S=\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}].$$

15. Să se determine toate numerele reale m, astfel încît să avem

$$(m-1)x^2-mx-2>0,$$

oricare ar fi $x>2$, real.

16. Să se determine numerele reale a, b, c astfel încît ecuația

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$$

să aibă o infinitate de soluții.

17. Să se determine numerele reale a, b astfel încît ecuația

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2}+\sqrt[3]{(ax-b)^2}+\sqrt[3]{a^2x^2-b^2}=\sqrt[3]{b}$$

să aibă soluție unică.

18. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive. Să se arate că

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)} \leqslant a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n}.$$

19. Să se demonstreze că

$$[\log_2 x-\log_2[x]]=[\log_2 x]-[\log_2[x]].$$

20. Fie numerele pozitive $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$, în progresie aritmetică crescătoare. Să se arate că

$$\frac{n}{a_1a_{2n+1}}<\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}<\frac{n}{a_0a_{2n}}.$$

21. Fie funcția $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ avînd proprietățile următoare:
a) $f(2)=2$; b) $f(mn)=f(m)f(n)$, oricare $m, n\in\mathbf{N}$; c) $f(m)>f(n)$, dacă $m>n$.
Să se arate că $f=1_{\mathbf{N}}$.

22. Fie M o mulțime cu n elemente. Considerăm ecuațiile:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = M, \tag{1}$$

$$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k = \varnothing, \tag{2}$$

unde $k \geqslant 1$ este un număr natural, iar $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sînt submulțimi ale lui M.

Să se demonstreze, prin inducție, că numărul soluțiilor $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ ale ecuației (1), respectiv ale ecuației (2), este egal cu $(2^k - 1)^n$ (vezi problema **34**, cap. X).

23. La o bibliotecă există două registre. Fiecare cititor înscrie în primul registru numărul de cititori pe care i-a întîlnit în sala de lectură și în al doilea înscrie numărul de cititori care au rămas după plecarea lui. Să se arate că la ora închiderii în cele două registre sînt înscrise aceleași numere, eventual în altă ordine.

24. Să se demonstreze că, dacă $n > 2$ este un număr natural, atunci 2^{2n} divide pe $\mathbf{C}_{2^n}^{2^{n-1}} - \mathbf{C}_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$.

25. Să se decidă care dintre numerele $5^{\sqrt{6}}$ și $6^{\sqrt{5}}$ este mai mare.

26. Să se arate că primele 100 de cifre după virgulă ale numărului $(\sqrt{26} + 5)^{101}$ sînt toate zero.

27. Fie n un număr natural. Să se demonstreze că

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \mathbf{C}_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

28. La o serbare participă b băieți și f fete. Se știe că orice grup de m băieți cunoaște cel puțin m fete $(m < b, f)$. Să se arate că există posibilitatea ca fiecare băiat să danseze cu o fată pe care o cunoaște.

29. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n, astfel încît $n \mid 2^n + 1$.

30. Să se determine toate numerele prime p, cu proprietatea că $p \mid 2^p + 1$.

31. Să se arate că oricare ar fi numărul natural n, avem $n \nmid 2^n - 1$.

32. Să se arate că oricare ar fi $p > 2$, număr prim, există o infinitate de numere naturale n, astfel încît $p \mid n \cdot 2^n + 1$.

33. Să se arate că șirul $\{2^n - 3\}_n$ are o infinitate de termeni care se divid cu 5, o infinitate de termeni care se divid cu 13, dar nici un termen al său nu se divide cu 5.13.

34. Fie a, b, c, d, e numere întregi. Să se arate că, dacă $9 \mid a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$, atunci $3 \mid abcde$.

35. a) Fie a, b numere întregi cu $a \neq b$. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n astfel încît $(a + n, b + n) = 1$; b) Fie a, b, c numere întregi distincte. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, astfel încît $a + n$, $b + n$, $c + n$ să fie prime între ele două cîte două.

36. Să se arate că, dacă p este un număr prim $\geqslant 2$, atunci $p \mid \mathbf{C}_{2p}^p - 2$.

37. Să se determine numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_9$ astfel încît

$$3^{x_1} + 3^{x_2} + \ldots + 3^{x_9} = 19683.$$

38. Să se arate că dacă $n \geqslant 1$ numărul $2^{2^{n+1}} + 3$ nu este prim.

39. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci $11 \mid 2^{2^{4n+1}} + 7$.

40. Să se arate că, dacă n este număr natural, atunci

$$29 \mid 2^{2^{6n+2}} + 13.$$

41. Fie polinoamele $p(X) = aX^2 + bX + c$ și $q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ cu coeficienți reali astfel încît oricare $x \in \mathbf{R}$, să avem $q(p(x)) = x$. Să se determine $p(q(x))$.

42. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt numere întregi distincte, să se arate că polinomul

$$(X - a_1)(X - a_2) ... (X - a_n) + 1$$

nu se poate scrie ca produsul a două polinoame neunitare cu coeficienți întregi.

43. Fie polinoamele $P(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^{m-1}$, $Q(X) = X^{u_1} + X^{u_2} + ... + X^{u_n}$, unde $0 < u_1 < u_2 < ... < u_n$ sînt numere întregi.

Pentru $k \in \{0, 1, ..., m - 1\}$, fie n_k numărul acelor i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, pentru care restul împărțirii lui a_i la m este k. Să se demonstreze că $P(X)$ divide $Q(X)$ dacă și numai dacă $n_0 = n_1 = ... = n_{m-1}$.

44. Fie $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polinom de grad $\geqslant 1$. Să se arate că mulțimea divizorilor primi ai numerelor $P(n)$, $n \in \mathbf{N}$, este infinită.

45. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, notăm cu $m(\sigma)$ numărul de inversiuni al lui σ. Să se calculeze suma

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma).$$

46. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice cu 4 linii și 7 coloane astfel încît $a_{ij} \in \{0,1\}$, oricare ar fi i, j. Să se arate că există $m < n$ și $p < q$ astfel încît $a_{mp} = a_{mq} = a_{np} = a_{nq}$.

47. Fie $n \in \mathbf{N}$ și $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Să se determine cel mai mare termen al dezvoltării binomului $(a + b)^n$.

48. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1327 & 1443 & 2899 \\ 4303 & 4174 & 1599 \\ 1716 & 1352 & 1704 \end{pmatrix}.$$

Să se decidă dacă $\det A$ este nenul.

49. Fie G un grup și H, K două subgrupuri ale sale. Să se arate că, dacă există $a, b \in G$ astfel încît $aH = bK$, atunci $H = K$.

50. Să se arate că grupurile multiplicative $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ și $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ nu sînt izomorfe.

51. Fie G un grup astfel încît singurul automorfism al său să fie cel identic. Să se arate că G este comutativ și oricare ar fi $x \in G$, $x^2 = e$.

52. Fie H un subgrup al grupului aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ al numerelor raționale. Să se arate că, dacă $\mathbf{Q} = H + \mathbf{Z}$ (unde $H + \mathbf{Z} = \{h + n \mid h \in H, n \in \mathbf{Z}\}$), atunci $H = \mathbf{Q}$.

53. Fie G un grup și $a, b \in G$ astfel încît $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se arate că $a^4 = b^4 = e$.

54. Fie G un grup și $a, b \in G$ astfel încît $a^2 = e$, $aba^{-1} = b^n$, unde $n \geqslant 2$ este număr natural.

Să se arate că

$$b^{n^2-1} = e.$$

55. Fie G un grup și $a, b \in G$, astfel încît $a^m = e$, $aba^{-1} = b^k$, unde $m \neq 0$ și $k \geqslant 2$ sînt numere naturale. Să se arate că $b^{k^m - 1} = e$.

56. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale considerăm *distanța* $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $d(x, y) = |x - y|$. Numim izometrie a lui $\mathbf{R}$ o funcție bijectivă $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$. Vom nota cu Izom ($\mathbf{R}$) mulțimea izometriilor lui $\mathbf{R}$.

i) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcția $\tau_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\tau_a(x) = x + a$. Să se arate că τ_a este o izometrie (care se numește *translație*), iar $\tau_1^n = \tau_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$.

ii) Dacă $a \in \mathbf{R}$, definim funcția $\varepsilon_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varepsilon_a(x) = a - x$. Să se arate că ε_a este o izometrie (care se numește *reflexie*), iar $\varepsilon_a^2 = 1_{\mathbf{R}}$, $\varepsilon_a \circ \tau_b = \tau_{-b} \circ \varepsilon_a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

iii) Să se arate că orice izometrie a lui $\mathbf{R}$ este o translație sau o reflexie;

iV) Să se arate că (Izom ($\mathbf{R}$), $\circ$) este un grup necomutativ.

Mai mult, dacă notăm $T = \{\tau_a\}_{a \in \mathbf{R}}$, să se arate că $(T, \circ)$ este un subgrup al grupului (Izom($\mathbf{R}$), $\circ$) și este izomorf cu grupul aditiv ($\mathbf{R}$, +) al numerelor reale.

57. În definiția unui inel (nu neapărat comutativ) cu unitate, să se arate că axioma de comutativitate a operației de adunare este o consecință a celorlalte axiome ale inelului.

58. Fie A un inel (necomutativ) cu unitate, iar $a, b \in A$. Să se arate că, dacă $1 - ab$ este inversabil, atunci și $1 - ba$ este inversabil.

59. Fie A un inel cu unitate și $a, b \in A$ astfel încît $a, b, ab - 1$ sînt inversabile. Să se arate că elementele $a - b^{-1}$ și $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ sînt inversabile. Mai mult, are loc egalitatea

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a.$$

60. Fie K și K' două corpuri comutative și $\varphi : K \to K'$ o aplicație astfel încît $\varphi(1) = 1$. Să se arate că φ este omomorfism de corpuri dacă și numai dacă:

i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, oricare ar fi $x, y \in K$;

ii) $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$, oricare ar fi $x \in K, x \neq 0$.

61. Fie H mulțimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Să se arate că H, înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor, este un corp necomutativ. Mai mult, ecuația $x^2 + I_4 = 0$ are o infinitate de soluții în H.

62. Fie $\mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$) mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi cu elemente din $\mathbf{C}$. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$), notăm $[A, B] = AB - BA$. Să se arate că:

i) $[A, B]^2$ comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$).

ii) Dacă $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$), atunci matricea $[A, B]\,[C, D] + [C, D]\,[A, B]$ comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2$ ($\mathbf{C}$).

63. Fie A un inel cu proprietatea că $x^6 = x$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

Partea a doua

INDICAŢII, SOLUŢII, RĂSPUNSURI

Capitolul I
ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) falsă; e) adevărată; f) falsă; g) adevărată. **2.** a) adevărată; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) adevărată; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) adevărată; j) falsă; k) falsă. **5.** a) adevărată,; b) falsă; c) falsă; d) adevărată; e) falsă; f) adevărată; g) adevărată; h) adevărată; i) falsă. **6.** Se arată că propoziţia $(\forall y)$ $(\exists x)$ $p(x, y)$ este adevărată şi propoziţia $(\exists x)$ $(\forall y)$ $p(x, y)$ este falsă. **7.** La fel ca în exerciţiul 6). **8.** a) adevărată; falsă; adevărată; falsă; falsă; falsă; b) falsă; adevărată; adevărată; adevărată. **9.** a) adevărată; b) falsă; c) adevărată; d) adevărată; e) falsă.

Capitolul II
MULŢIMI

1. a) $\{7\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-1, 2\}$; d) $\{-1\}$; e) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$; f) $\{1\}$; g) $\emptyset$; h) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$; i) $\{-1+\sqrt{6},3\}$; j) $\emptyset$; k) $\{-2, 1, 3\}$; e) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; m) $\emptyset$; n) $\{0, 3\}$; p) $\{1\}$; q) $[4, +\infty)$. **2.** $A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. **3.** a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $E = \{3, 4\}$; **4.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$. **5.** $A = \{1, 2, 3, 9\}$; $B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$. **7.** Sînt toate submulţimile mulţimii $\{b, d, e\}$. Deci în total sînt 8 submulţimi. **8.** $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. **9.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; **10.** $X = \{3, 5, 7, 9\}$ şi $X = \{3, 5, 7, 8, 9\}$. **11.** $X = \{4, 5, 6\}$. **12.** $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 4\}$. **15.** Sînt 9 soluţii. **16.** Folosim complementara: $\complement_E \emptyset = \complement_E(X \cap Y) \Rightarrow E = \complement_E X \cup \complement_E Y$ şi revenim la problema **15.** **17.** a) $A = \{-7, 1, 5, 13\}$; b) $B = \{3\}$. **18.** Scriem $x = 2n - 1 + \frac{n+8}{3n+1}$. Trebuie ca $3n + 1$ să dividă pe $n + 8$. Deci $3n + 1$ divide $3(n + 8) - (3n + 1) = 23$. Deci $3n + 1 = \pm 1$; $3n + 1 = \pm 23$. Obţinem $A = \{-17, 7\}$. **19.** Avem $a^2 - a + 1 = ax + x \Rightarrow a^2 - a(1 + x) + 1 - x = 0$. Punem condiţia că $\Delta = (1 + x)^2 - 4(1 - x) \geq 0$. Obţinem că mulţimea dată deste egală cu $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+21}{2}, +\infty\right)$. **20.** $x = 3 + \frac{6n-2}{n^2+1}$. Dacă $n \geq 6$ avem $n^2 + 1 > 6n - 2$. Deci trebuie ca $n \leq 5$. Obţinem $A = \{1, 5\}$

21. $y = 2 - x$ şi obţinem ecuaţia $|x| - 2|2 - x| = -1$, $A = \{(5, -3); (1, 1)\}$. **22.** Fie $d = (a, b)$; $a = da'$, $b = db'$ unde a' şi b' sînt prime între ele. $ab = d^2a'b' = 144\, a'b' \Rightarrow a'b' = 15 \Rightarrow a' = 1$, $b' = 15$; $a' = 3$; $b' = 5$; $a' = 5$, $b' = 3$; $a' = 15$, $b' = 1$. Deci $A = \{(12, 180);\ (36, 60), (60, 36), (180, 12)\}$. **23.** Scriem $(3y - (x + 1))(3y + (x + 1)) = 32$. Rezultă că $3y - (x + 1)$ poate lua valorile 1, 2, 4. Deci $3y + (x + 1)$ ia valorile 32, 16, 8. Mulţimea căutată este: $\{(6, 3), (1, 2)\}$. **24.** Este intervalul $(-3, -2)$. **25.** Scriem $(x - y)^2 + 2y^2 = 8$. Obţinem $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$. Mulţimea căutată este $\{(-2, -2), (2, 2)\}$. **26.** Scriem $3y = 1980 - x \Rightarrow y = 660 - \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow y = 660 - k$ unde $0 \leqslant k \leqslant 660$. Deci mulţimea dată are 661 elemente. **27.** $3y = 1980 - 4x \Rightarrow y = 660 - 4 \cdot \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow y = 660 - 4k$. Cum $y \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant 4k \leqslant 660 \Rightarrow 0 \leqslant k \leqslant 165$. Deci mulţimea dată are 166 elemente. **28.** Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$. Cum $A \cup B = \{-1, 1, 2, 4\}$, avem singurele posibilităţi $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ sau $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$. Deci $m = -4$ sau $m = 2$. Rezultă $n = -3$, $p = 2$ sau $n = -3$ şi $p = -4$. **29.** $x = \frac{a^2 + a + m}{a + 1} \Rightarrow a^2 + a(1 - x) + m - x = 0$. Cum $a \in \mathbf{R}$, atunci discriminantul acestei ecuaţii trebuie să fie $\geqslant 0$. Deci $\Delta = x^2 + 2x + 1 - 4m \geqslant 0$.

Discuţie: Dacă $m < 0$ atunci $\Delta > 0$ oricare ar fi x şi deci $A_m = \mathbf{R}$, $\forall m < 0$. Dacă $m = 0$, atunci $\Delta = (1 + x)^2 \geqslant 0$. Dar $x = -1$ nu este de forma $\frac{a^2 + a}{a + 1}$, $(a \in \mathbf{R})$. Deci $A_0 = \mathbf{R} - \{-1\}$. Dacă $m > 0$ atunci $A_m = (-\infty, -1 - 2\sqrt{m}) \cup [-1 + 2\sqrt{m}, +\infty)$. Se constată uşor că intersecţia mulţimilor A_m cînd m parcurge numerele reale pozitive este vidă. **30.** Dacă mulţimea ar fi nevidă, există fracţia ireductibilă $x = \frac{p}{q}$ astfel încît $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$. Deci $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Cum a, b, c sînt impare, din această egalitate rezultă imediat că numerele p şi q trebuie să fie pare amîndouă. Dar atunci $x = \frac{p}{q}$ nu ar mai fi ireductibilă. **31.** Din egalitatea $x = 3n + 1 = 7m - 1$ se obţine că m este de forma $m = 3t + 2$. Deci $x = 21t + 13$. **32.** $x^2 - 4x + m^2 = 0$ are discriminantul $\Delta_1 = 16 - 4m^2$; $x^2 - mx + 1 = 0$ are discriminantul $\Delta_2 = m^2 - 4$; $\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow \Delta_2 < 0$ şi în acest caz intersecţia este vidă; deci $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, $m = \pm 2$; şi în acest caz intersecţia este vidă. **33.** În primul caz se arată că $A = \{1, a, b\}$. În al doilea caz se arată că prima ecuaţie are o rădăcină dublă şi cea de-a doua are 2 rădăcini reale de forme diferite de rădăcina primei ecuaţii. **34.** Se foloseşte discriminantul celor două ecuaţii. **35.** Pentru $m = -2$, A are un singur element. **36.** Dacă $m \neq 1, 2$, A are 3 elemente; dacă $m = 1, 2$, A are 2 elemente. **37.** Cele două ecuaţii au discriminantul strict pozitiv şi nu au nici o rădăcină comună. **38.** Dacă -1 este rădăcină, avem $m = -3$; dacă 1 este rădăcină, avem $m = -\frac{1}{3}$. **39.** **40.** **41.** **42.** Se studiază semnul rădăcinilor. **43.** Notăm $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2bx + a = 0\}$. Se studiază cazurile: 1) $A = \emptyset$, adică $a^2 < b$; atunci

$A - B = \emptyset$. 2) A are un singur element x_1; atunci este necesar și suficient ca $x_1 \in B$. Se obțin pentru (a, b) soluțiile $(0, 0)$; $(1, 1)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; 3) A are două elemente; deci B trebuie să aibă aceleași elemente. Se obțin condițiile $b^2 > a, a^2 > b$ și $a = b$. **44.** $X = (A - B) \cup (B - A)$.

Capitolul III
FUNCȚII

1. Sînt 6 funcții injective. **2.** Sînt 9 funcții. **3.** 12 funcții. **4.** Se înlocuiește x cu $1 - x$ și se obține un sistem de ecuații care rezolvat dă $f(x) = -4x + \frac{11}{5}$. **5.** Facem $y = x$ și $f(2x) - f(0) = 4x^2$. Punem $f(0) = a$ și înlocuim x cu $\frac{x}{2}$ și avem $f(x) = a + x^2$. **6.** Se face $y = 1$ se obține că f este o funcție constantă. **7.** Se face $x = 0$ și $x = n$ și se obține o contradicție. **8.** Nu există. **9.** $m = \frac{5}{12}$, $n = \frac{11}{12}$. **10.** Nu există. **11.** Se înlocuiește x cu $-x$ și se obține $4f(-x) + 3f(x) = c|x|$. Se formează sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 4f(x) + 3f(-x) = c\,|x| \\ 3f(x) + 4f(-x) = c\,|x| \end{cases}. \quad \text{Se obține } f(x) = \frac{c}{7}\,|x|.$$

12. $f(x) = x$; $f(x) = -x + b$, $b \in \mathbf{R}$.

13. $f^n(x) = a^n x + (a^{n-1} \cdot b + a^{n-2}b + \ldots + ab + b)$.

14. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geqslant 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$; $\quad g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \geqslant 2, \\ x + 3, & x < 2, \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geqslant 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$; $\quad g(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant 2, \\ -x + 3, & x < 2. \end{cases}$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1 \\ 2, & x < 1 \end{cases}; \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 2, \\ 4, & x < 2. \end{cases}$$

16. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$ $\quad (g \circ f)(n) = n$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

17. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 8, & x \leqslant -2 \\ 3x - 2, & -2 < x \leqslant 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}$; $(g \circ f)(x) = -3$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

18. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x < -1 \\ x^2 + 2x + 4, & x \geqslant -1 \end{cases}$; $\quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0, \\ x^2 + 4, & x \geqslant 0. \end{cases}$

19. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x + 1}{2}, & x \leqslant 3 \\ x - 1, & x > 3 \end{cases}$; $\quad$ **20.** $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 4, \\ \frac{x + 2}{3}, & x < 4. \end{cases}$

21. $f^{-1}(x)=\begin{cases}x+3, & x\leqslant 1\\ \frac{x+7}{2}, & x>1\end{cases}$; **22.** a) f nu este injectivă deoarece $f(0)=f(5)$. b) f nu este injectivă deoarece $f(0)=f(7)$; c) $f(x)=x(x^2-3x+2)-4$ și se vede că $f(0)=f(1)=f(2)$; d) $f(x)=x^{1979}(x^2-4)+1\Rightarrow f(0)=f(2)=f(-2)$. **24.** $f(x)=x^3(2x+3)+4\Rightarrow f(0)=f\left(-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow f$ nu este injectivă $g(x)=g(y)\Rightarrow x^3=y^3\Rightarrow x=y\Rightarrow g$ injectivă. **25.** a) $m=2$; b) $f(1)=f\left(\frac{5}{2}\right)=2$, f nu este injectivă. **26.** I) Dacă îl scriem pe a în baza 10 atunci b este ultima cifră; II) dacă $a=0$ atunci luăm $n_0=1$; $a=1$ luăm $n_0=1$; $a=2$ luăm $n_0=4$; $a=3$, $n_0=4$; $a=4$ luăm $n_0=2$; $a=5$, $n_0=1$, $a=6$, $n_0=1$, $a=7$, $n_0=4$; $a=8$, $n_0=4$; $a=9$, $n_0=2$. **27.** Presupunem că $f\neq 1_A\Rightarrow(\exists)\ a\in A$, $f(a)=b$ cu $a\neq b$. Fie $c\in A$, $c\notin\{a,b\}$. Considerăm funcția $g:A\to A$, $g(a)=a$, $g(b)=c$, $g(c)=b$ și $g(x)=x$, $\forall x\notin\{a,b,c\}$; $(g\circ f)(a)=c$ și $(f\circ g)(a)=b\Rightarrow g\circ f\neq f\circ g$. **28.** a) $f([-1,1])=[-1,3]$, $f([-2,0])=[-3,1]$, $f((-2,1])=(-3,3]$, $f((1,2))=(3,5)$. b) $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x<2\\ x-1, & x\geqslant 2\end{cases}$; $f([1,3])=f([1,2]\cup[2,3])=f([1,2])\cup f([2,3])=[1,2]$; $f([-1,3])=[1,4]$; $f([1,+\infty))=[1,+\infty)$; c) $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\leqslant -2,\\ 2, & -2\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1;\end{cases}$ $f([0,1])=\{2\}$; $f([-2,1])=\{2\}$; $f([-3,2])=[2,4]$.
29. b) Presupunem f injectivă. Fie $b\in f(X)\cap f(Y)$; atunci $b\in f(X)$ și $b\in f(Y)$. Există $x\in X$ și $y\in Y$ astfel încît $b=f(x)=f(y)$. Cum f este injectivă, atunci $x=y$ și deci $x\in X\cap Y$; deci $b\in f(X\cap Y)$. Deci $f(X)\cap f(Y)\subset f(X\cap Y)$. Cum $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$, obținem egalitatea $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$. Reciproc, presupunem $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$ oricare ar fi submulțimile X, Y ale lui A. Fie $x,y\in A$ astfel încît $f(x)=f(y)$. Notăm $X=\{x\}$, $Y=\{y\}$. Deci $f(X)=\{f(x)\}$ și $f(Y)=\{f(y)\}$ de unde obținem $f(X\cap Y)\neq\emptyset$. Deci $X\cap Y\neq\emptyset$ și deci $x=y$, adică f este injectivă. **30.** a) Presupunem f injectivă. Fie $b\in f(CA')$. Atunci există $a\in CA'$ astfel încît $b=f(a)$. Deci $a\notin A'$. Dacă $b\in f(A')$ atunci există $a'\in A'$ cu $b=f(a')$. Cum f este injectivă, $a=a'$ și deci $a\in A'$, contradicție. Deci $b\notin f(A')$, adică $b\in Cf(A')$. Deci $f(CA')\subset Cf(A')$. Reciproc, fie $x\neq y$. Notăm $A'=\{x\}$. Deci $y\in CA'$ și deci $f(y)\in f(CA')\subset Cf(A')$ de unde $f(y)\notin f(A')$; cum $f(A')=\{f(x)\}$ obținem $f(y)\neq f(x)$ și deci f este injectivă. **31.** a) Presupunem f injectivă. Fie $f_*(A')=f_*(A'')$ unde $A', A''\in\mathcal{P}(A)$. Avem $f(A')=f(A'')$. Fie $x\in A'\Rightarrow f(x)\in f(A')\Rightarrow f(x)\in f(A'')\Rightarrow(\exists)y\in A''$ astfel încît $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y\Rightarrow x\in A'\Rightarrow A'\subset A''$. Analog se arată că $A''\subset A'$. Deci f_* este injectivă. Fie $f(x)=f(y)$, $x,y\in A$. Dacă $A'=\{x\}$, $A''=\{y\}$, avem $f_*(A')=f_*(A'')$. Deci $A'=A''\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă. b) și c) se demonstrează în mod similar. **32.** a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 0\\ -2x+1, & x<0\end{cases}$;
b) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty).\end{cases}$

NUMERE REALE
(Structura algebrică şi de ordine a mulţimii numerelor reale)

8. Generalizare. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale, atunci $\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_n}{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})(a_1+a_2+\ldots+a_n)} = \frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$. **9.** Se arată că produsul este egal cu $\frac{[c^2-(a-b)^2][c-(a+b)]+abc}{abc}$. I) Dacă $c=-(a+b)$, numărătorul se reduce la 9 abc, şi deci produsul este 9. II) Dacă $c^2=(a-b)^2$, numărătorul se reduce la abc, şi deci produsul este 1. **10.** Dacă $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$, rezultă că $3(a+b)(c+a)(b+c)=0$. Deci unul din factori este neapărat nul. Dacă $b+c=0$, atunci $c=-b$, de unde $c^{2n+1}=-b^{2n+1}$. Fiecare membru al egalităţii se reduce la a^{2n+1}. **11.** II) Din $a^3+b^3+c^3=3abc$ rezultă $\frac{1}{2}(a+b+c)[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]=0$, de unde $a+b+c=0$ sau $a=b=c$. **12.** I) Înmulţim membru cu membru inegalităţile: $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$, $c+a \geqslant 2\sqrt{ca}$; II) Din $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, rezultă $(a^2+b^2)c \geqslant 2abc$. Analog, avem $(b^2+c^2)a \geqslant 2abc$, $(c^2+a^2)b \geqslant 2abc$. Adunăm, membru cu membru, cele trei inegalităţi. III) Din $a^2-ab+b^2 \geqslant ab$, multiplicînd ambii membri cu $a+b$, rezultă $a^3+b^3 \geqslant (a+b)ab$. Analog, avem $b^3+c^3 \geqslant (b+c)bc$, $c^3+a^3 \geqslant (c+a)ca$. Adunăm membru cu membru cele trei inegalităţi. **13.** Din $a+b+c=1$, deducem $\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$, $\frac{1}{b}=\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}$, $\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$, de unde $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geqslant 3+2+2+2=9$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$. **14.** Se observă că $\frac{ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{4}$, $\frac{bc}{b+c} \leqslant \frac{b+c}{4}$, $\frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{c+a}{4}$ şi însumîndu-le membru cu membru se obţine inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a=b=c$. **15.** Deoarece $a+b=2$, rezultă $a-1=1-b$. Dacă $c=a-1=1-b$, atunci $a=1+c$, $b=1-c$. Inegalitatea de demonstrat devine $(1+c)^4+(1-c)^4 \geqslant 2$. **16.** Din segmentele de lungime a, b, c se poate construi un triunghi $\Leftrightarrow a+b-c>0$, $b+c-a>0$, $c+a-b>0$. Aşadar trebuie demonstrat că au loc cele trei inegalităţi de mai înainte $\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4) \Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0 \Leftrightarrow [a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]<0 \Leftrightarrow (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)<0 \Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)>0$. **17.** Din condiţia problemei rezultă $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$c \neq 0$, $a + b + c \neq 0$. Se arată că, din $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, rezultă $(b + c)(c + a)(a + b) = 0$. **18.** I) $\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2(a^{m+n} + b^{m+n}) - (a^m + b^m)(a^n + b^n) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0$. Pentru demonstrarea ultimei inegalităţi, se consideră separat cazurile: 1) m şi n impare; 2) m şi n pare; II) În particular, $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2} \leqslant$ $\leqslant \frac{a^4 + b^4}{2}$ şi $\frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^4 + b^4}{2} \leqslant \frac{a^6 + b^6}{2}$, de unde prin înmulţire membru cu membru, se obţine inegalitatea cerută. **19.** Avem $(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \geqslant 0$ şi $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqslant 0$, care ne dau $2abc(a + b + c) \leqslant a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, şi $0 \leqslant$ $\leqslant a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$. Adunînd membru cu membru ultimele inegalităţi obţinem inegalitatea din enunţ. **20.** $\sqrt{(a + c)(b + d)} \leqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \Leftrightarrow (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geqslant 0$. Avem egalitatea dacă $ad = bc$. **21.** Ridicînd la pătrat ambii membri şi făcînd calcule se obţine inegalitatea echivalentă $\sqrt{(1 - a)(1 - b)} \leqslant 1 - ab$, care ridicată din nou la pătrat este echivalentă cu $0 \leqslant (a - b)^2$. Egalitatea are lor pentru $a = b$. **22.** I) $ab + ac + bc \leqslant$ $\leqslant a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0$; III) Înmulţind cu 2 şi trecînd totul în membrul al doilea obţinem: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (a_i - a_j)^2 \geqslant 0$. **23.** Fie $m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_i}{b_i}$ şi $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_i}{b_i}$. Atunci $m \leqslant \frac{a_i}{b_i} \leqslant M$, pentru orice i ($1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant n$), de unde $mb_i \leqslant a_i \leqslant Mb_i$, oricare ar fi i. Însumăm după i şi găsim imediat inegalităţile cerute. **24.** Rezultă din problema precedentă. **25.** II) Fie s un număr real pozitiv care il scriem ca sumă $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n > 0$ (1). De asemenea, $s = \underbrace{\frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \ldots + \frac{s}{n}}_{n \text{ (ori)}}$ (2). Să arătăm că dacă termenii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu sînt egali între ei, atunci produsul lor este mai mic decît al celor din descompunerea (2). Să presupunem că, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Dacă $a_1 > \frac{s}{n}$, atunci în mod necesar $a_n < \frac{s}{n}$. Fie diferenţele $a_1 - \frac{s}{n}$ şi $\frac{s}{n} - a_n$ şi să presupunem că $t = \frac{s}{n} - a_n < a_1 - \frac{s}{n}$. Înlocuim în (1) pe a_1 cu $a_1 - t$ şi pe a_n cu $a_n + t = \frac{s}{n}$. Suma termenilor este, de asemenea, egală cu s, adică $s = (a_1 - t) + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{s}{n}$, dar conform (I) produsul termenilor creşte. Astfel am ajuns la un termen (ultimul) egal cu $\frac{s}{n}$. Se continuă procedeul pînă ajungem că toţi termenii trebuie să fie egali cu $\frac{s}{n}$.

pentru a avea produsul maxim. **26.** II) $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})[(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c})^2 + (\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a})^2] \geqslant 0$. Celelalte inegalități rezultă din aceasta. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$; III) Conform exercițiului precedent avem: $a_1a_2 \ldots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n$, ceea ce este echivalentă cu inegalitatea mediilor. Egalitatea are loc cînd toate numerele sînt egale între ele. **27.** Este suficient să demonstrăm că $(a + a')(b + b')(c + c') \geqslant (\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'})^3$. Avem $(a + a')(b + b')(c + c') = abc + a'b'c' + (abc' + acb' + bca') + (ab'c' + ba'c' + ca'b')$. Pe de altă parte, $(\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'})^3 = abc + a'b'c' + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2a'b'c'} + 3\sqrt[3]{abca'^2b'^2c'^2}$. Acum folosim problema 26 pct. II). **28.** I), II). Se folosește problema 26. **29.** Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încît $p = a_1a_2 \ldots a_n$. Din inegalitatea mediilor avem $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{p}$, iar $p = \underbrace{\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{p} \ldots \sqrt[n]{p}}_{n \text{ (ori)}}$. **30.** Rezultă din inegalitatea mediilor.

31. Din inegalitatea mediilor avem: $\frac{a_i^2 + a_i + 1}{3} \geqslant a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Înmulțind membru cu membru cele n inegalități, rezultă inegalitatea cerută. **32.** Din inegalitatea mediilor avem inegalitățile $\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1}{a_2} + 1 \geqslant 3 \cdot \frac{a_1}{a_2}$; $\frac{a_2^2}{a_3^2} + \frac{a_2}{a_3} + 1 \geqslant 3 \cdot \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_n^2}{a_1^2} + \frac{a_n}{a_1} + 1 \geqslant 3 \cdot \frac{a_n}{a_1}$, care înmulțite membru cu membru ne dau inegalitatea cerută. **33.** În inegalitatea $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$, înlocuind numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prin $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ se obține inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. **34.** Se folosește problema 25. **35.** Observăm mai întîi, că dacă $a \geqslant b > t > 0$, atunci $(a + t)^2 + (b - t)^2 > a^2 + b^2$. În particular rezultă că $a^2 + b^2 > \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$, unde $s = a + b$. Fie acum (1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$ și (2) $\underbrace{\frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \ldots + \frac{s}{n}}_{n \text{ (ori)}} = s$. Printr-un raționament analog celui de la problema 25, ținînd seamă de inegalitatea de mai înainte, se obține că suma pătratelor termenilor din (1) este mai mare decît suma pătratelor termenilor din (2). **36.** Se folosește problema precedentă. **37.** Trecînd totul în membrul drept, inegalitatea devine: $\sum_{i,j}(a_ib_j - a_jb_i)^2 \geqslant 0$. Egalitatea are loc numai cînd toate parantezele sînt egale cu 0, adică $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

$c \neq 0$, $a + b + c \neq 0$. Se arată că, din $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, rezultă $(b+c)(c+a)(a+b) = 0$. **18.** I) $\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2(a^{m+n} + b^{m+n}) - (a^m + b^m)(a^n + b^n) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0$. Pentru demonstrarea ultimei inegalități, se consideră separat cazurile: 1) m și n impare; 2) m și n pare; II) În particular, $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2} \leqslant$ $\leqslant \frac{a^4 + b^4}{2}$ și $\frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^4 + b^4}{2} \leqslant \frac{a^6 + b^6}{2}$, de unde prin înmulțire membru cu membru, se obține inegalitatea cerută. **19.** Avem $(a^2 - bc)^2 +$ $+ (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \geqslant 0$ și $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqslant 0$, care ne dau $2\,abc\,(a + b + c) \leqslant a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, și $0 \leqslant$ $\leqslant a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$. Adunînd membru cu membru ultimele inegalități obținem inegalitatea din enunț. **20.** $\sqrt{(a+c)(b+d)} \leqslant \sqrt{ab} +$ $+ \sqrt{cd} \Leftrightarrow (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geqslant 0$. Avem egalitatea dacă $ad = bc$. **21.** Ridicînd la pătrat ambii membri și făcînd calcule se obține inegalitatea echivalentă $\sqrt{(1-a)(1-b)} \leqslant 1 - ab$, care ridicată din nou la pătrat este echivalentă cu $0 \leqslant (a - b)^2$. Egalitatea are loc pentru $a = b$. **22.** I) $ab + ac + bc \leqslant$ $\leqslant a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$; III) Înmulțind cu 2 și trecînd totul în membrul al doilea obținem: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (a_i - a_j)^2 \geqslant 0$. **23.** Fie $m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_i}{b_i}$ și $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{a_i}{b_i}$. Atunci $m \leqslant \frac{a_i}{b_i} \leqslant M$, pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant n)$, de unde $mb_i \leqslant a_i \leqslant Mb_i$, oricare ar fi i. Însumăm după i și găsim imediat inegalitățile cerute. **24.** Rezultă din problema precedentă. **25.** II) Fie s un număr real pozitiv care îl scriem ca sumă $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n > 0$ (1). De asemenea, $s = \underbrace{\frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \ldots + \frac{s}{n}}_{n \text{ (ori)}}$ (2). Să arătăm că dacă termenii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu sînt egali între ei, atunci produsul lor este mai mic decît al celor din descompunerea (2). Să presupunem că, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Dacă $a_1 > \frac{s}{n}$, atunci în mod necesar $a_n < \frac{s}{n}$. Fie diferențele $a_1 - \frac{s}{n}$ și $\frac{s}{n} - a_n$ și să presupunem că $t = \frac{s}{n} - a_n < a_1 - \frac{s}{n}$. Înlocuim în (1) pe a_1 cu $a_1 - t$ și pe a_n cu $a_n + t = \frac{s}{n}$. Suma termenilor este, de asemenea, egală cu s, adică $s = (a_1 - t) + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{s}{n}$, dar conform (I) produsul termenilor crește. Astfel am ajuns la un termen (ultimul) egal cu $\frac{s}{n}$. Se continuă procedeul pînă ajungem că toți termenii trebuie să fie egali cu $\frac{s}{n}$.

pentru a avea produsul maxim. **26.** II) $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ac}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})[(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c})^2 + (\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a})^2] \geqslant 0$. Celelalte inegalități rezultă din aceasta. Egalitatea are loc pentru $a = b = c$; III) Conform exercițiului precedent avem: $a_1a_2 \dots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n$, ceea ce este echivalentă cu inegalitatea mediilor. Egalitatea are loc cînd toate numerele sînt egale între ele. **27.** Este suficient să demonstrăm că $(a + a')(b + b')(c + c') \geqslant (\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'})^3$. Avem $(a + a')(b + b')(c + c') = abc + a'b'c' + (abc' + acb' + bca') + (ab'c' + ba'c' + ca'b')$. Pe de altă parte, $(\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a'b'c'})^3 = abc + a'b'c' + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2a'b'c'} + 3\sqrt[3]{abca'^2b'^2c'^2}$. Acum folosim problema 26 pct. II). **28.** I) ,II). Se folosește problema 26. **29.** Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel incît $p = a_1a_2 \dots a_n$. Din inegalitatea mediilor avem $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{p}$, iar $p = \underbrace{\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{p}\dots\sqrt[n]{p}}_{n \text{ (ori)}}$. **30.** Rezultă din inegalitatea mediilor.

31. Din inegalitatea mediilor avem: $\frac{a_i^2 + a_i + 1}{3} \geqslant a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Înmulțind membru cu membru cele n inegalități, rezultă inegalitatea cerută. **32.** Din inegalitatea mediilor avem inegalitățile $\frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1}{a_2} + 1 \geqslant 3 \cdot \frac{a_1}{a_2}$; $\frac{a_2^2}{a_3^2} + \frac{a_2}{a_3} + 1 \geqslant 3 \cdot \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_n^2}{a_1^2} + \frac{a_n}{a_1} + 1 \geqslant 3 \cdot \frac{a_n}{a_1}$, care înmulțite membru cu membru ne dau inegalitatea cerută. **33.** În inegalitatea $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n}$, înlocuind numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ prin $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ se obține inegalitatea cerută. Egalitatea are loc pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. **34.** Se folosește problema 25. **35.** Observăm mai întîi, că dacă $a \geqslant b > t > 0$, atunci $(a + t)^2 + (b - t)^2 > a^2 + b^2$. În particular rezultă că $a^2 + b^2 > \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$, unde $s = a + b$. Fie acum (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$ și (2) $\underbrace{\frac{s}{n} + \frac{s}{n} + \dots + \frac{s}{n}}_{n \text{ (ori)}} = s$. Printr-un raționament analog celui de la problema 25, ținînd seamă de inegalitatea de mai înainte, se obține că suma pătratelor termenilor din (1) este mai mare decît suma pătratelor termenilor din (2). **36.** Se folosește problema precedentă. **37.** Trecînd totul în membrul drept, inegalitatea devine: $\sum_{i,j}(a_ib_j - a_jb_i)^2 \geqslant 0$. Egalitatea are loc numai cînd toate parantezele sînt egale cu 0, adică $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

79. a) Inecuaţia este echivalentă cu $\frac{|a-b|}{|b+n|} < \frac{|a-b|}{b}$. Cum $a \neq b$, inecuaţia este echivalentă cu $b = |b| < |b+n| = b+n$; b) $\left|\frac{a+n_0}{n+n_0} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{|a-b|}{|b+n_0|} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\varepsilon} < |b+n_0| \leqslant |b| + |n_0| \Rightarrow n_0 > \frac{|a-b|}{\varepsilon} - |b|$. Putem lua $n_0 = \left[\frac{|a-b|}{\varepsilon} - |b|\right] + 1$. **80.** $k = l(l+1)$, $l \in \mathbf{N}$. **81.** Fie $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = x \in \mathbf{Q}$. Atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} = x - \sqrt{c}$; deci $a + b + 2\sqrt{ab} = x^2 - 2x\sqrt{c} + c$, de unde $2\sqrt{ab} = x^2 + c - a - b - 2x\sqrt{c}$. Printr-o nouă ridicare la pătrat se obţine $4x(x^2 + c - a - b)\sqrt{c} = (x^2 + c - a - b)^2 + 4x^2c - 4ab$. Dacă $x(x^2 + c - a - b) \neq 0$, atunci $\sqrt{c} \in \mathbf{Q}$. Dacă $x(x^2 + c - a - b) = 0$, atunci avem una din situaţiile: I) $x = 0$, atunci $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = 0$; II) $x \neq 0$, atunci $x^2 + c - a - b = 0$. În acest caz se obţine $\sqrt{c} = 0$. Deci $\sqrt{c} \in \mathbf{Q}$. Analog, se demonstrează că $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$. Generalizare. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n} \in \mathbf{Q}$. **82.** Fie $p, q \in \mathbf{N}$, $p \neq q$ şi $x = \sqrt[n]{\frac{p}{\sqrt{2}}}$, $y = \sqrt[n]{\frac{q}{\sqrt{2}}}$. Atunci $x^n\sqrt{2}$, $y^n\sqrt{2} \in \mathbf{N}$ şi $x \neq y$, iar $f(x) = f(y) = 0$. **83.** a) Ecuaţia este echivalentă cu $\frac{x-2}{3} \leqslant \frac{x+3}{4} < \frac{x-2}{3} + 1$ şi $\frac{x-2}{3} \in \mathbf{Z}$. Rezultă $x \in \{11, 14, 17\}$; b) Avem condiţiile $\frac{x-1}{3} \leqslant \frac{x^2-3x+1}{3} < \frac{x-1}{3} + 1$ şi $\frac{x-1}{3} \in \mathbf{Z}$. Se obţine $x = 4$. **84.** a) Presupunem prin absurd că $\left|a_k - \frac{1}{2}a_n\right| > \frac{1}{2}$, oricare ar fi k. Rezultă că oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $a_k \in \left(-\infty, \frac{1}{2}a_n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty\right)$. Din $k = n$ rezultă $a_n > \varepsilon$, deci $a_n \in \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{\varepsilon}{2}, +\infty\right)$. Din $|a_1| \leqslant \varepsilon$ rezultă $a_1 \in \left(-\infty, \frac{1}{2}a_n - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Din $|a_{i+1} - a_i| \leqslant \varepsilon$ rezultă că toţi a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, se găsesc într-unul singur din cele două intervale; contradicţie.; b) Fie $s_0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - a_n$, ..., $s_n = -a_1 - a_2 - \ldots - a_n$. Putem presupune $s_0 > 0$ şi deci $s_n < 0$. Fie k astfel încît $s_k > 0$, $s_{k+1} < 0$ (dacă una din sume este nulă problema este rezolvată.) Dar $|s_k - s_{k+1}| < 2|a_k|$. Din $0 \in (s_k, s_{k+1})$ rezultă că una din cele două sume s_k, s_{k+1} are modulul $\leqslant |a_k| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$. **85.** Ridicînd la pătrat ambii membri ai primei egalităţi, obţinem $a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$, $a, b, x, y \in \mathbf{Q}$. De aici rezultă $a = x + y$, $b = 4xy$, x şi y fiind rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea: $x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0$. Pentru ca x şi y raţionale să existe, este necesar şi sufi-

cient ca $a^2 - b$ să fie pătratul unui număr rațional. A doua egalitate se tratează la fel. Avem: $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Aceasta se numeşte formula radicalilor compuşi. **86.** Putem presupune $a > 0$, deci $c < 0$. Avem $0 = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} < \frac{a+b+c}{m+1}$, deci $a + b + c > 0$. Dar $a + b + c + \frac{c}{m} = a + b + \frac{m+1}{m}c = a + b - \frac{m+1}{m+2}a -$

$$- b = \frac{1}{m+2}a > 0. \text{ Avem } f\left(\frac{m}{m+1}\right)f(1) =$$

$$= \frac{(a+b+c)(am^2+bm^2+bm+cm^2+2m+c)}{(m+1)^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(-am-bm-cm-c)}{(m+1)^2} =$$

$$= \frac{m}{(m+1)^2}\left(a+b+c)(-1)(a+b+c+\frac{c}{m}\right) < 0.$$

87. Dacă $a < b$, $|x-a| + |x-b| = \begin{cases} a+b-2x, & \text{pentru } x \leqslant a, \\ -a+b, & \text{pentru } a \leqslant x \leqslant b, \\ 2x-a-b, & \text{pentru } x \geqslant b. \end{cases}$

Deci funcția atinge valoarea minimă $-a + b$, în fiecare punct al intervalului $[a, b]$. În general, putem presupune $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Dacă $n = 2k$ scriem $f(x) = (|x - a_1)| + |x - a_n|) + (|x - a_2| + |x - a_{n-1}|) + \ldots + (|x - a_k| + |x - a_{k-1}|)$. Folosind cazul $n = 2$, se găseşte în final că funcția își atinge valoarea minimă: $-a_1 - a_2 - \ldots - a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$, în fiecare punct al intervalului $[a_k, a_{k+1}]$. Pentru $n = 2k + 1$, scriem $f(x) = (|x - a_1| + |x - a_n|) + \ldots + (|x - a_k| + |x - a_{k+2}|) + |x - a_{k+1}|$. Rezultă că funcția își atinge valoarea minimă: $-a_1 - a_2 - \ldots - a_k + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_n$, în $x = a_{k+1}$.

88. a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{(n \text{ ori})} = \frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2+(n-1)} + \ldots + \frac{3n}{2n^2}\right] <$$

$$< \frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2} + \ldots + \frac{3n}{2n^2}\right] = \frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{n}.$$

De aici, rezultă inegalitatea din dreapta relației de la pct a); b) Avem evident $\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. Apoi, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1} +$

$$+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{(n\text{ ori})}+\frac{1}{n}=\frac{2n}{n}=2.$$ Pe de altă parte,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3n}\right)+\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{3n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\right]>$$

$$>\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}\right]=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1.$$

89. Dacă $q=0$ sau $\sqrt{r}\in\mathbf{Q}$ este evident. Dacă nu, presupunem prin absurd că $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$ $(q\neq 0,\ \sqrt{r}\notin\mathbf{Q})$. Atunci $2=p^3+3q^2pr+\sqrt{r}\ (3qp^2+q^3r)$, de unde $p^3+3q^2pr=q$, $q(3p^2+q^2r)=0$. Deci $3p^2+q^2r=0$, contradicție. **90.** $\{a \mid a=\dfrac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2},\ m,n\in\mathbf{Z},\ (m,n)=1\}$. **91.** Fie $\{x\}=x-[x]$. Atunci ecuația devine $x^3-x=3-\{x\}$, de unde $2<x^3-x\leqslant 3$. Mai mult se arată că pentru $x\geqslant 2$, $x^3-x>3$; pentru $x<-1$, $x^3-x<2$; pentru $x=-1$, $x^3-x=0<2$; pentru $-1<x\leqslant 0$, $x^3-x<1$ și pentru $0<x\leqslant 1$, $x^3-x\leqslant 1$. Deci trebuie ca $1<x<2$, și prin urmare $[x]=1$. Ecuația inițială se scrie $x^3-1=3$, deci $x^3=4$; de unde $x=\sqrt[3]{4}$.

92. Avem $s=\dfrac{1}{10^2}+\dfrac{1}{11^2}+\ldots+\dfrac{1}{1000^2}>\dfrac{1}{10\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 12}+\ldots+$

$$+\frac{1}{1000\cdot 1001}>\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}\right)=\frac{1}{10}-$$

$-\dfrac{1}{1001}>0{,}1-0{,}001=0{,}099$. De asemenea, $s<\dfrac{1}{9\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 11}+\ldots+$

$$+\frac{1}{999\cdot 1000}=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{9}-$$

$-\dfrac{1}{1000}<0{,}112-0{,}001=0{,}111$. Deci $0{,}099<s<0{,}111$. **93.** Dacă $a<1$, atunci $a<\sqrt{a}<1$. Presupunem prin absurd că în reprezentarea lui $\sqrt{a}$ nu sînt 100 de 9 consecutivi, adică $\sqrt{a}<1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{100}$. Ridicînd la pătrat ținem $a<1-2\left(\dfrac{1}{10}\right)^{100}+\left(\dfrac{1}{10}\right)^{200}$. Dar, $1-2\left(\dfrac{1}{10}\right)^{100}+\left(\dfrac{1}{10}\right)^{200}<1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{100}$ și deci $a<1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{100}$, ceea ce contrazice faptul că în reprezentarea lui a sînt 100 de 9 consecutivi după virgulă. **94.** a) Fie $N_1=\dfrac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$ și $N_2=$

$= \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$ $N_2 - N_1 = \frac{\alpha^2(1+\beta)-\beta^2(1+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha)^2(1+\beta+\beta^2)} = \frac{(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)} > 0.$ Deci $N_2 > N_1$. b) Se demonstrează analog. **95.** Este suficient să demonstrăm pentru $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Fie $a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0$. Separăm a și ridicăm la cub. Se obține că $p \mid a$. Împărțim egalitatea cu $\sqrt[3]{p}$ și analog deducem $p \mid b$. Continuăm în același mod și găsim $p \mid c$ ş.a.m.d. Deducem că oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$, $p^k \mid a$, $p^k \mid b$ și $p^k \mid c$ și deci în mod necesar $a = b = c = 0$. **96.** a) $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$, unde $0 \leqslant \{x\}, \{y\} < 1$, sînt părțile fracționare ale sumelor x, respectiv y. Atunci $x + y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\}$. Cum $\{x\} + \{y\} \geqslant 0$, rezultă că $[x] + [y] \leqslant x + y$ și $[x] + [y] \in \mathbf{Z}$. Deci $[x] + [y] \leqslant [x + y]$; b) $x = [x] + \{x\}$, unde $0 \leqslant \{x\} < 1$. Fie $[x] = qn + r$, unde $0 \leqslant r \leqslant n - 1$. Atunci $\frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n}$, $\left[\frac{[x]}{n}\right] = q$ și $x = qn + r + \{x\} = qn + r_1$, unde $r_1 = r + \{x\} < n$. Deci, $\frac{x}{n} = q + \frac{r_1}{n}$, unde $0 \leqslant \frac{r_1}{n} < 1$, și $\left[\frac{x}{n}\right] = q = \left[\frac{[x]}{n}\right]$; c) Dacă $x - [x] < \frac{1}{2}$, atunci $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x]$, și deci $[2x] = 2[x]$ și $[2x] - [x] = 2[x] - [x] = [x] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$. Dacă $x - [x] \geqslant \frac{1}{2}$, atunci $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x] + 1$, $[2x] = 2[x] + 1$, și deci $[2x] - [x] = 2[x] + 1 - [x] = [x] + 1 = \left[x + \frac{1}{2}\right]$; d) Fie $m = [x]$ și să presupunem că $m + \frac{l}{n} \leqslant x < m + \frac{l+1}{n}$, unde $0 \leqslant l \leqslant n - 1$. Deducem deci că $x + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-l-1}{n}\right] + \left[x + \frac{n-l}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = (n - l)m + l(m + 1) = nm + l = n\left(m + \frac{l}{n}\right) = [nx]$. **97.** b) $n = 4$; c) 2 cifre nu sînt în perioadă, iar 6 sînt în perioadă. **98.** $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n^2 + 4n + 2}{n(n+1)(n+2)}$. Se observă că numitorul fracției este multiplu de 3, pe cînd numărătorul nu este multiplu de 3. Numitorul fracției, adusă la forma ireductibilă, are factorii 2 și 3, de unde rezultă că fracția se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă. **99.** Observăm mai întîi că este suficient să arătăm pentru $m = 1$. a) Fie $\frac{1}{n} = 0,(a_1a_2 \ldots a_p)$, adică $\frac{1}{n} = \frac{a_1a_2 \ldots a_p}{10^p - 1}$, deci $10^p - 1 = n \cdot (a_1a_2 \ldots a_p)$; b) Cu perioadă de o cifră sînt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, și $\frac{a}{9}$ unde $(a, 9) = 1$. Dacă, acum, perioada este bc, atunci fracția este $\frac{bc}{99}$. Ea ar putea fi simplificată, eventual, printr-un divizor al lui 99. La numitor rămîne un divizor al lui 99. Deci numitorul poate fi 3, 9, 11, 33, 99. Însă la $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{9}$ perioada are o cifră. Deci rămîn numai fracțiile de numitor 11, 33, 99, care au perioada de două cifre etc. c) Produsul a două numere cu perioadă simplă este un număr cu

perioadă simplă. Conform a), avem $10^k - 1 = \mathcal{M}n$ şi $10^{k'} - 1 = \mathcal{M}n'$, şi cum $(n, n') = 1$, rezultă $10^{(k,k')} - 1 = \mathcal{M}nn'$. Mai mult, (k, k') este cel mai mic număr cu această proprietate. **100.** Conform problemei **99** b), fracţiile cu două cifre la partea periodică sînt cele de numitor 11, 33, 99. Dacă la o astfel de fracţie înmulţim numitorul cu 2, 5 sau cu 10, obţinem fracţiile cerute în enunţ. **101.** Perioadele lui $\frac{1}{7}$ şi $\frac{1}{13}$ au cîte 6 cifre fiecare. Deci $\frac{m}{7} = \frac{p}{999\,999}$ şi $\frac{m}{13} = \frac{p'}{999\,999}$, de unde $\frac{p}{p'} = \frac{13}{7}$. **102.** Perioada avînd $n-1$ cifre, ca resturi parţiale la împărţirea lui m la n, întîlnim toate numerele a, $1 \leqslant a \leqslant n - 1$, eventual într-o altă ordine. Cînd apare ca rest un anume m, de aici încolo resturile parţiale sînt aceleaşi cu acelea obţinute prin împărţirea lui m la n.

Capitolul V

FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA. INECUAŢII. SISTEME DE ECUAŢII

1. a) $f(x) = (x-1)^2 + 5$; b) $f(x) = -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{57}{4}$; c) $f(x) = \frac{2}{3}(x-3)^2 - 5$; d) $f(x) = 0{,}5(x - 0{,}2)^2 + 0{,}28$; e) $f(x) = -0{,}4(x - 1{,}25)^2 + 0{,}725$; f) $5\left(x - \frac{1}{20}\right) + \frac{79}{80}$; **2.** a) $x = \frac{1}{4}$, $V\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$; b) $x = -\frac{1}{2}$, $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{43}{4}\right)$; c) $x = \frac{3}{2}$, $V\left(\frac{3}{2}, \frac{-39}{4}\right)$; d) $x = 1$, $V(1 - 2)$; e) $x = 0{,}1$, $V(0{,}1;\ 0{,}395)$; f) $x = \frac{1}{3}$, $V\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{36}\right)$. **3.** a) $y_{\max} = 0$; b) $y_{\min} = \frac{1}{2}$; c) $y_{\min} = -\frac{1}{4}$; d) $y_{\max} = 7$; e) $y_{\min} = \frac{14}{5}$; f) $y_{\min} = -4$.
4. a) Pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ funcţia este pozitivă şi pentru $x \in (1, 5)$ funcţia este negativă; b) Pentru $x \in (-3, -2)$ funcţia este pozitivă şi pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ funcţia este negativă; c) Funcţia este pozitivă pentru $x \in \mathbf{R}$; d) Funcţia este pozitivă pentru $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) Funcţia este pozitivă pentru $x \in (1, 4)$; f) Funcţia este negativă pentru $x \in \left(0, \frac{25}{2}\right)$. **6.** a) $f(x) = |x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$; $x_1 = x_2 = 1$, $V = (1, 0)$ (fig. 1);

b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & \text{dacă } x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}], \\ x^2 - 2x - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty); \end{cases}$

(fig. 2)

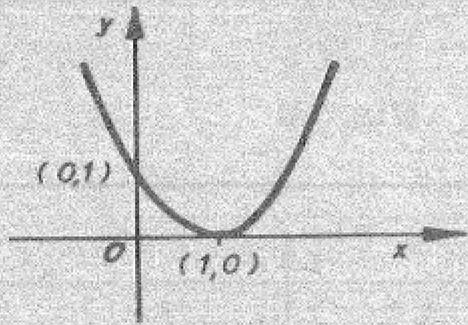


Fig. 1

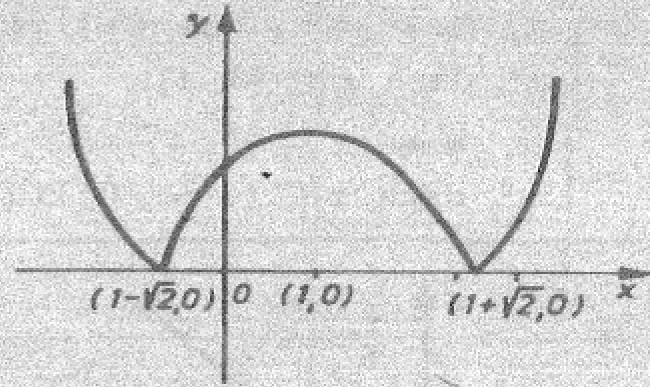


Fig. 2

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), \\ -x^2 + 5x + 1, \text{ dacă } x \in (0, 5); \end{cases}$ (fig. 3)

d) $k(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2} + \infty\right), \\ -2x^2 + 3x - 1, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{3}{2}\right); \end{cases}$ (fig. 4)

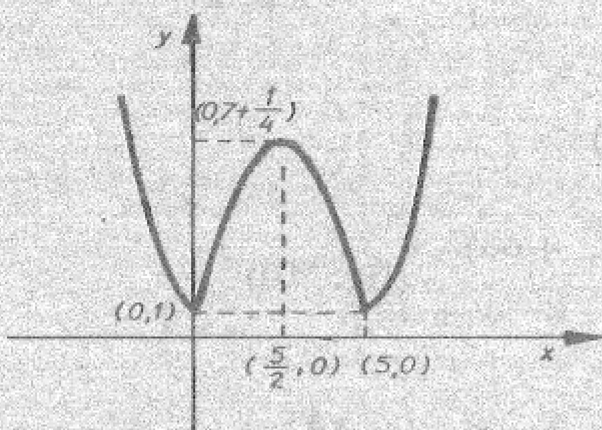


Fig. 3

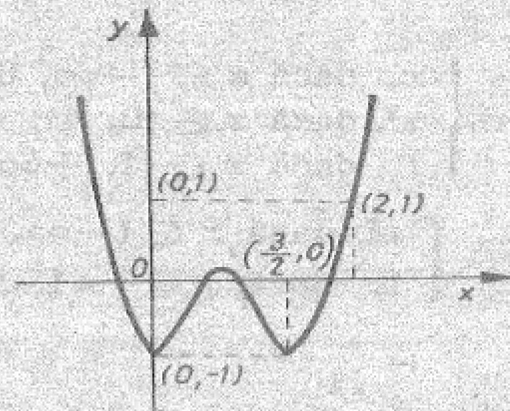


Fig. 4

e) (fig. 5)

f) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 25, \text{ dacă } x \in (-\infty, -4] \cup [4 + \infty), \\ 7, \text{ dacă } x \in (-4, -3] \cup [3, 4), \\ -2x^2 + 25, \text{ dacă } x \in (-3, 3); \end{cases}$

(fig. 6)

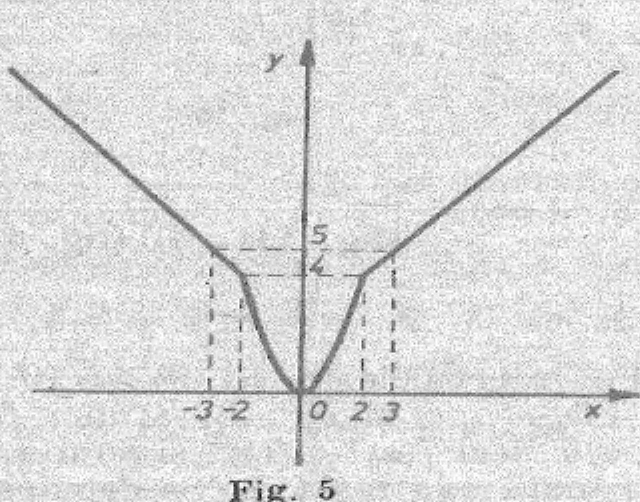


Fig. 5

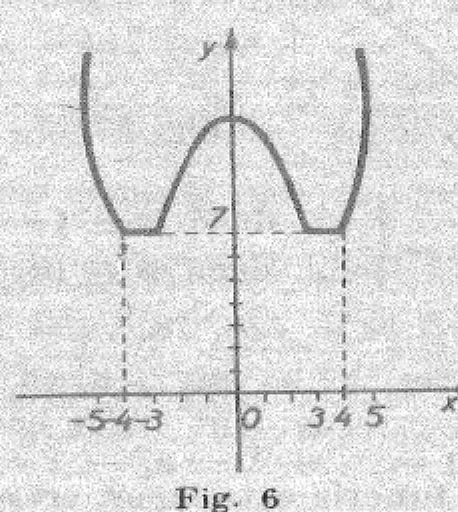


Fig. 6

g) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \\ x^2, & \text{dacă } x \in (0, 1); \end{cases}$ (fig. 7)

h) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty); \end{cases}$ (fig. 8)

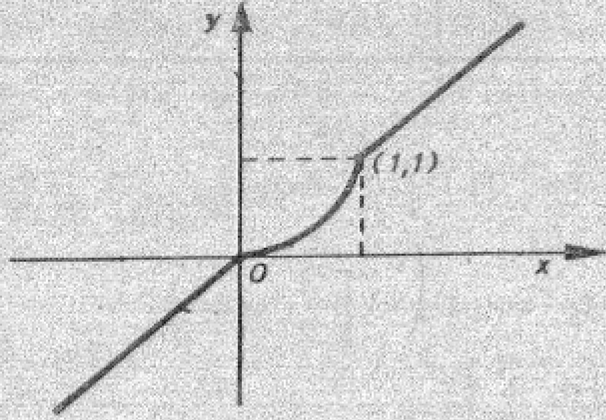


Fig. 7

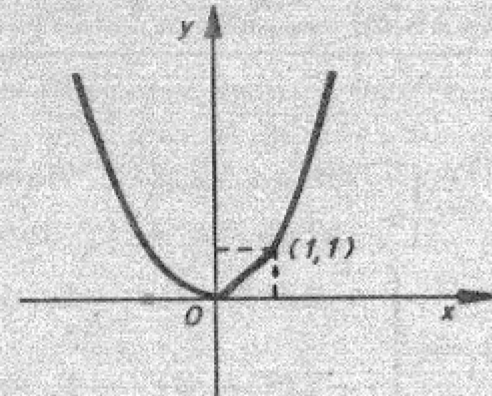


Fig. 8

i) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ 1, & \text{dacă } x \in (1, +\infty); \end{cases}$ (fig. 9)

j) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 1, & \text{dacă } x \in (-1, 1); \end{cases}$ (fig. 10)

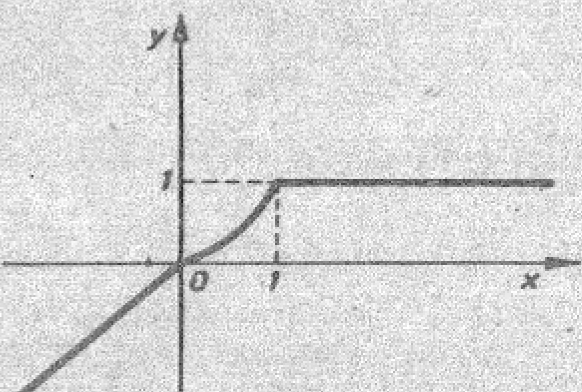


Fig. 9

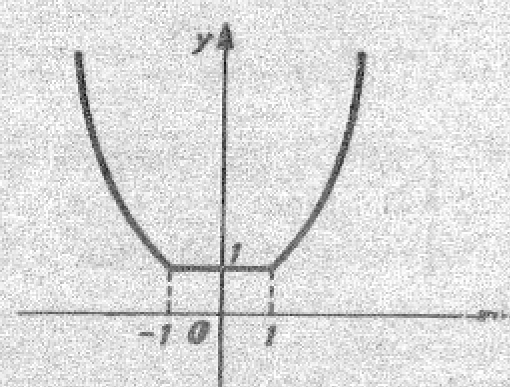


Fig. 10

k) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty), \\ 2x, & \text{dacă } x \in (0, 2); \end{cases}$ (fig. 11) l) (fig. 12)

7. $a=1$, $c=-4$. **8.** $a=1$, $b=-2$, $c=3$. **9.** $a=1$, $b=-5$, $c=6$.

10. $a=1$, $b=-8$, $c=12$. **11.** a) Pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $[0, +\infty)$ funcția este evident strict crescătoare. Fie $x_1<0$ și $x_2>0$, atunci $f(x_1)-f(x_2)=x_1+1-x_2^2-1=x_1-x_2^2<0$ deci $f(x_1)<f(x_2)$ și cum $x_1<x_2$, atunci funcția este strict crescătoare pe toată axa reală; b) Se demonstrează

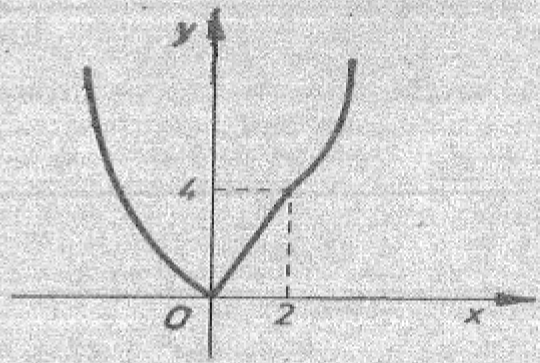


Fig. 11

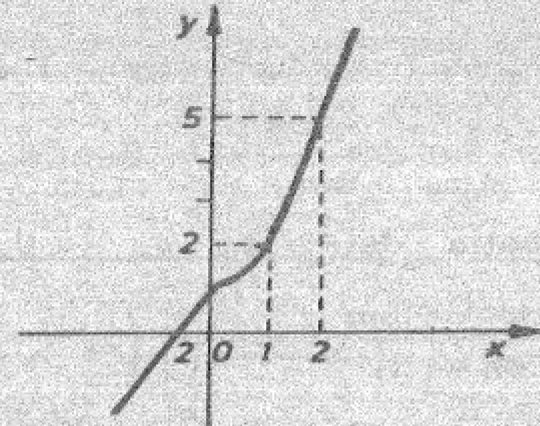


Fig. 12

ca la punctul a). **12.** Se procedează ca la problema **11. 13.** Pentru injectivitate se ține cont că funcțiile respective sînt strict crescătoare sau descrescătoare.

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \sqrt{x-1}, \text{ dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1], \\ 1 + \sqrt{x-1}, \text{ dacă } x \in (1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_3^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \dfrac{1-x}{2}, \text{ dacă } x \in [1, +\infty); \end{cases}$$

$$f_4^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{2-x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 2), \\ 2 - \sqrt{x-2}, \text{ dacă } x \in [2, +\infty); \end{cases}$$

14. $a = -25$, $b = 10$, $c = 8$; $a = -1$, $b = 10$, $c = -16$. **15.** a) $m = -\frac{6}{7}$; b) $m = \frac{7}{3}$; c) -4; $-\frac{12}{13}$; d) 15; -3; e) -2; f) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $-2 \pm \sqrt{2}$; h) 0; i) 12; -3; j) $\frac{-5}{8}$; -1; k) 0; 2; **16.** Se ține seama de relații între rădăcini și coeficienți la ecuația de gradul II și se obține: a) m; b) $m + 1$; c) $m^2 - 2m - 2$; d) $\sqrt{m^2 - 4m - 4}$, dacă $x_1 \geqslant x_2$ și $-\sqrt{m^2 - 4m - 4}$ dacă $x_1 < x_2$; e) $m(m^2 - 3m - 3)$; f) $m^4 - 4m^3 - 2m^2 + 4m + 2$; g) $m^5 - 5m^4 + 10m^2 + 5m$; h) $\frac{m}{m+1}$; i) $\frac{m^2 - 2m - 2}{(m+1)^2}$; j) $\frac{m^3 - 3m^2 - 3m}{(m+1)^3}$. **17.** Se observă că rădăcinile ecuației date sînt pozitive. a) $S = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $S^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = m^2 + 2\sqrt{m^2+1}$, de unde $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2+1}}$; b) $S = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$, $S^4 = x_1 + x_2 + 4\sqrt[4]{x_1 x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + 6\sqrt{x_1 x_2}$, $S^4 = m^2 + 4\sqrt[4]{m^2+1}\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2+1}} + 6\sqrt{m^2+1}$, $S = \sqrt[4]{m^2 + 4\sqrt[4]{m^2+1}\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2+1}} + 6\sqrt{m^2+1}}$. **18.** a) $x^2 - 49 = 0$, b) $x^2 + 5x = 0$; c) $15x^2 - 34x + 15 = 0$; d) $14x^2 -$

$-17x+5=0$; e) $9x^2-6x-1=0$. **19.** a) $y_1+y_2=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{m+1}{5m-2}$, $y_1y_2=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{2}{5m-2}$. Sau se procedează astfel $x=\frac{1}{y}$ şi se înlocuieşte în ecuaţia dată. b) $y_1+y_2=+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-m+1}{2}-\frac{m+1}{5m-2}=$ $=\frac{-(m+1)5m}{2(5m-2)}$, $y_1y_2=\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_1}\right)=\frac{25m^2}{2(5m-2)}$; c) $y_1+y_2=$ $=\frac{4m-3}{2}$, $y_1y_2=-\frac{(m+1)(5m-2)}{4}$; d) $y_1+y_2=\frac{x_1x_2+x_2^2+x_1^2+x_1x_2}{x_1x_2}=$ $=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}$, $y_1y_2=\frac{x_1+x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_2}=\frac{S^2}{p}=\frac{(m+1)^2}{2(5m-2)}$; e) $y_1+y_2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{m^2-18m+9}{10m-4}$, $y_1y_2=1$; f) $y_1+y_2=\frac{m^2-18m+9}{4}$, $y_1y_2=\left(\frac{5m-2}{2}\right)^2$; g) $y_1+y_2=\frac{-m+1}{2}\cdot\frac{m^2-28m+13}{4}$, $y_1y_2=$ $=\left(\frac{5m-2}{2}\right)^3$; h) $y_1+y_2=\frac{m^2-18m+19}{(5m-2)^2}$, $y_1y_2=\frac{4}{(5m-2)^2}$; i) $y_1+y_2=$ $=\frac{-(m+1)(m^2-28m+13)}{(5m-2)^3}$, $y_1y_2=\frac{8}{(5m-2)^3}$. **20.** a) $x\in(-\infty,-1)\cup$ $\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$; b) $x\in\mathbf{R}$; c) $x\in\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{19}}{6}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6},\right.$ $\left.+\infty\right)$; d) $x\in\mathbf{R}$; e) $x\in\left(-\infty,\frac{-3}{4}\right)\cup(1+\infty)$; f) $\left(-1,\frac{4}{7}\right)$; g) $x\in$ $\in\left(2,\frac{7}{2}\right)$; h) $x\in(-\infty,-7)\cup(2,+\infty)$; i) $x\in(-6,6)$; j) $(1-\sqrt{5},-1)\cup$ $\cup\left(-1,-\frac{2}{3}\right)\cup(0,1)\cup(1,1+\sqrt{5})$; k) $x\in\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$; l) $x\in(-\infty,-2)\cup$ $\cup\left(\frac{-1-\sqrt{6}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$; m) $x\in(-\infty,5-\sqrt{12})\cup$ $\cup(5+\sqrt{12},+\infty)$. **21.** a) $x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$; b) $x=$ $=\frac{1}{3}$; c) $x\in\left(\frac{7-\sqrt{13}}{6},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)$; d) $x\in(-\infty,-4)$; e) $x\in(-\infty\ \ -1-\sqrt{23}]\cup[1-\sqrt{11};-1+\sqrt{23}]\cup[1+\sqrt{11},+\infty)$. **22.** $\Delta_x<0$; $\Delta_x=-y^2+4y-m+4<0$. Se pune $\Delta_y<0$ unde Δ_y este discriminantul ecuaţiei $-y^2+4y-m+4=0$, deci $\Delta_y=-4m+32<0$; $m\in(8,+\infty)$. **23.** Se procedează ca la problema **22** şi se găseşte $m\in\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$.

24. Se notează $x^2-4x+5=t$ şi se obţine $t\in[-1,0)\cup\left[\frac{4}{5},+\infty\right)$, de

unde $-1 \leqslant x^2 - 4x + 5 < 0$ sau $x^2 - 4x + 5 \geqslant \frac{4}{5}$ şi se obţine $x \in \mathbf{R}$.
25. $f([0, 2]) = f([0, 1) \cup [1, 2]) = [-1, 0]$; b) $f([-2, 4)] = f([-2, 1) \cup [1, 4]) = [-1, 8]$; c) $f([1, 6]) = [-1, 24]$; d) $f([-10, 0]) = [0, 120]$. S-a ţinut cont că funcţia este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ şi strict crescătoare pe $(1, +\infty)$. **26.** $f([-4, 0]) = [3, 35]$; b) $f([1, 6]) = f([1, 2) \cup [2, 6]) = [-1, 15]$; c) $f([3, 5]) = [0, 8]$; d) $f([3, +\infty)) = [0, +\infty)$; e) $f((-\infty, -1]) = [8, +\infty)$; f) $f((-\infty, 3]) = f((-\infty, 2) \cup [2, 3]) = [-1, +\infty)$. **27.** a) $\Delta = 49$, $y_{\min} = -\frac{49}{4}$; $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{49}{4}, +\infty\right)$; b) $\Delta = -3$, $\operatorname{Im} f = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$; c) $\operatorname{Im} f = [3, +\infty)$; d) Se egalează fracţia cu m şi se obţine $x^2(1 - m) - x(2 + m) - (3 + m) = 0$). Se pune condiţia $\Delta > 0$; $m \in \left[\frac{2 + 2\sqrt{13}}{-3}, \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3}\right]$ deci $\operatorname{Im} f = \left[\frac{2 + 2\sqrt{13}}{-3}, \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{3}\right]$; e) $\operatorname{Im} f = \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right]$; f) $\operatorname{Im} f = (-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, +\infty)$; g) Presupunem $a < b$ şi obţinem $\operatorname{Im} f = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$. Dacă $a = b$, $\operatorname{Im} f = \mathbf{R} \setminus \{a\}$. **28.** Se pun condiţiile ca discriminantul de la numitor şi de la numărător să fie negativ şi se obţine $m \in (1, 2)$. **29.** a) Se arată că discriminantul numitorului este negativ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. b) Discriminantul de la numărător să fie negativ: $m \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$. **30.** Se găseşte $\operatorname{Im} f$ în funcţie de a, $\operatorname{Im} f = \left[\frac{-a + 2}{3}, \frac{3a + 6}{3}\right]$ dacă $a \geqslant -1$ şi $\operatorname{Im} f = \left[\frac{3a + b}{3}, \frac{-a + 2}{3}\right]$ dacă $a < -1$: Se pun condiţiile $\frac{-a + 2}{3} \geqslant -3$ şi $\frac{3a + b}{3} \leqslant 2$ în cazul cînd $a \geqslant -1$ şi se obţine $a \in [-1, 0]$. În cazul cînd $a < -1$ se pun condiţiile $\frac{3a + 6}{3} \geqslant -3$ şi $\frac{-a + 2}{3} \leqslant 2$ şi se obţine $a \in [-4, -1)$. **31.** Fie $y = \frac{3x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$, se aduce la acelaşi numitor şi se obţine $(y - 3)x^2 - mx + y - n = 0$ şi se pune condiţia $\Delta_x \geqslant 0$; $\operatorname{Im} f = \left[\frac{n + 3 - \sqrt{(n - 3)^2 + m^2}}{2}, \frac{n + 3 + \sqrt{(n - 3)^2 + m^2}}{2}\right]$; se egalează aceste valori cu -3 respectiv 5 şi se obţine $n = -1$ şi $m = \pm 4\sqrt{3}$. **32.** $a \in [1, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **33.** a) $a = 1$ atunci $c = \frac{3}{4}(2m^2 + m)$ şi $b = |2m + 1|$; $S = -|2m + 1|$, $P = \frac{3}{4}(2m^2 + m)$ şi ecuaţia este $x^2 + |2m + 1|x + \frac{3}{4}(2m^2 + m) = 0$.
b) Dacă $m > -\frac{1}{2}$ se obţine $m \in \left(-2, -\frac{4}{11}\right)$ şi $\left(-2, -\frac{4}{11}\right) \cap \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) = \varnothing$. Dacă $m < -\frac{1}{2}$ se obţine $m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3 - \sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3 + \sqrt{73}}{2}\right)$ şi deci $m \in (-\infty, -2) \cup$

$\cup \left(\frac{3-\sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. **34.** a) $\Delta = m^2 - 6m + 1; \Rightarrow m_{1;2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. $S = \frac{2(m+1)}{m}$, $p = \frac{8}{m}$.

m	Δ	P	S	Natura şi semnul rădăcinilor
$-\infty$	+	−	+	$x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ x_1 < 0,\ x_2 > 0,\ \lvert x_2\rvert > \lvert x_1\rvert$
			+	
-1	+	−	0	$m = -1,\ x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1\rvert = x_2$
			−	
0	+	−	−	$m \in (-1, 0),\ x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ x_1 < 0,\ x_2 > 0,\ \lvert x_1\rvert > x_2$
$3-2\sqrt{2}$	0	+	+	rădăcini egale şi pozitive
	−	+	+	nu are rădăcini reale
$3+2\sqrt{2}$	0	+	+	rădăcini egale şi pozitive
$+\infty$	+	+	+	rădăcini reale distincte şi pozitive

b) $m \in (3 - 2\sqrt{3}, 0) \cup (3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$.

35. $\begin{matrix} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 \end{matrix}$ şi $\begin{matrix} y_1 + y_2 = m + 3 \\ y_1 y_2 = 12m + 11 \end{matrix}$ şi se obţine $m \in [-1, 5]$.

36. Se obţine $\frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{\alpha - \alpha^2} \leqslant 0$ deci $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ şi $-1 \leqslant \frac{2\alpha + 2}{\alpha - \alpha^2}$ deci $\alpha \in (-\infty, -1] \cup (0, 1)$; $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cap (-\infty, -1] \cup (0, 1) = (-\infty, -1]$ deci $\alpha \in (-\infty, -1]$. **37.** $m_1 = 3$, $m_2 = \frac{3}{2}$; b) $m \in (0, 2)$.

38. $$f \circ g = \begin{cases} (5x-2)^2 + 6(5x-2), & \text{dacă } x < -\frac{1}{5}, \\ -2(5x-2) - 5, & \text{dacă } -\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1, \\ -2(x^2 - 3x + 4) - 5, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$$

$$g \circ f = \begin{cases} (x^2 + 6x)^2 - 2(x^2 + 6x) + 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -3 - \sqrt{10}), \\ 5(x^2 + 6x) - 2, & \text{dacă } x \in [-3 - \sqrt{10}, -3), \\ 5(-2x - 5) - 2, & \text{dacă } x \in [-3, +\infty). \end{cases}$$

39. $$f \circ g = \begin{cases} (4x - 2)^2 - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ (3x^2 - 2)^2 - 1, & \text{dacă } x \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \\ -5(3x^2 - 2) - 1, & \text{dacă } x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right); \end{cases}$$

$$g \circ f = \begin{cases} 3(x^2 - 1)^2 - 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1), \\ 4(x^2 - 1) - 2, & \text{dacă } x \in [-1, 0], \\ 4(-5x - 1) - 2, & \text{dacă } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

40. $f \circ g = \begin{cases} 4x^2, \text{ dacă } x \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right), \\ \dfrac{1}{2}, \text{ dacă } x \in \left[\dfrac{1}{4}, 1\right); \end{cases}$

$g \circ f = \begin{cases} 2x^2, \text{ dacă } x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{1}{2}, \text{ dacă } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$

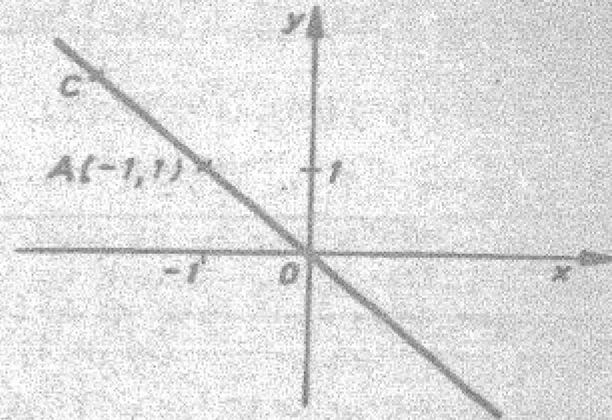


Fig. 13.

41. $y = \dfrac{m-1}{m}, m > 0, m = \dfrac{1}{1-y} \Rightarrow y < 1.$

Pe semidreapta $|AO$ se găsesc vîrfurile parabolelor cu ramurile în sus și pe semidreaptă $|AC$ vîrfurile parabolelor cu ramurile în jos (fig. 13).

42. Se pune $y_{min} > 0$, $y_{min} = -m^2 + 3m - 2$ deci $m \in (1, 2)$. **43.** a) $x_{min} = m - 2$, $y_{min} = -m^2 + 5m - 6$ deci parabola este $y = -x^2 + x$; b) $y_{min} = -m^2 + 5m - 1 < 0$ deci $m \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. **44.** $\Delta > 0$, $\Delta = 4(m^2 - m + 1) > 0$, $(\forall) m \in \mathbf{R}$. **45.** a) $x_{min} = m - 1$, $y_{min} = -m^2 + 3m - 1$; parabola este $y = -x^2 + x + 1$; b) Se arată y_{min} este mai mic decît $\dfrac{5}{4}$ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. **46.** $x_V = \dfrac{2m-1}{2m}$; $y_V = \dfrac{-1}{4m}$; $x_V = y_V$ și $m = \dfrac{1}{4}$. **47.** $\Delta > 0$, $\Delta = 24m - 36$; $m \in \left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$. 48. $\Delta > 0$, $(\forall) m \in \mathbf{R}$ și $\Delta = 36$. **49.** $\Delta = 0$, $\Delta = 4m^2 - 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 1$, $x_{1min} = 1$, $x_{2min} = -1$. **50.** $m = -1$. **51.** Se găsesc punctele de intersecție ale curbelor, $A(1, 2)$ și $B(3, 14)$. **52.** $x_{min} = 2$, $y_{min} = -1$, $|AB| = 2$, $|DV| = 1$. Aria triunghiului $VAB = 1$ (fig. 14). Aria dreptunghiului care are lungimea $|AB|$ și lățimea $|DV|$ este 2. Deci aria parabolei cuprinsă sub axa Ox care este S va fi cuprinsă între 1 și 2. **53.** Ecuațiile să aibă o rădăcină comună; se găsește $m = -2$. **54.** Se arată că ecuația $x^2 - 3x - p = 0$ nu are rădăcini raționale. **55.** Se duc paralele la axa yy' prin punctele $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ (fig. 15). Aria se aproximează prin ariile a două trapeze dreptunghice și a două triunghiuri dreptunghice și aria dreptunghiului care are ca bază segmentul

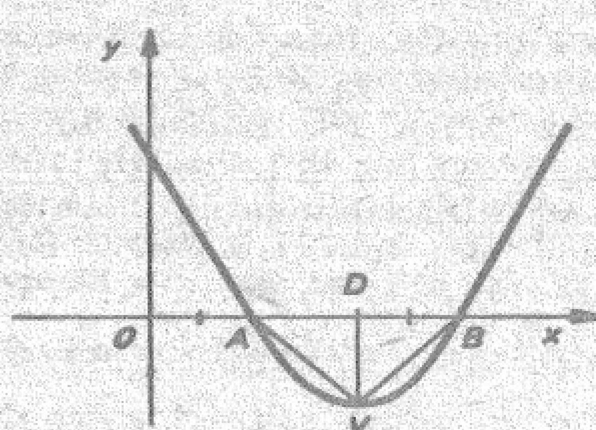


Fig. 14.

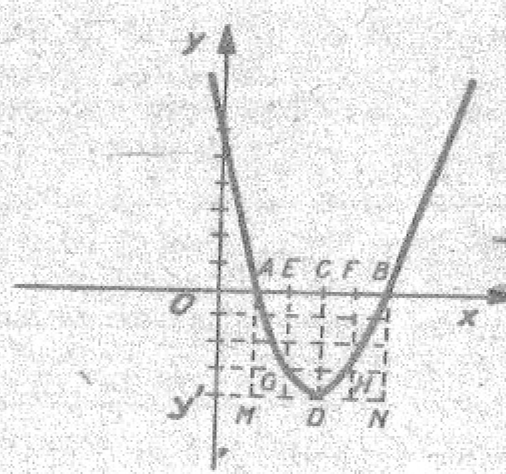


Fig. 15.

$|AB|$ și înălțimea $|CD|$. **56.** $y_{min} = \frac{m^2 - 10m + 9}{-4}$; $y_{min} > -7$; $m \in (5 - 2\sqrt{11},\ 5 + 2\sqrt{11})$. **57.** $x_V = \frac{m+7}{m} = 1 + \frac{7}{m}$, $y_V = -14 - \frac{49}{m}$ deci $m = \pm 1$, $m = \pm 7$. **58.** Se pun condițiile $a < 0$, $y_{min} < 0$; $m - 1 < 0$, $y_{min} = \frac{4m+5}{1-m} < 0$, se obține $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right)$. **59.** I) $y_{min} < 0$, $y_{min} = -(m+1) < 0$ deci $m \in (-1, +\infty)$; II) $\Delta = 0$, $m = -1$; III) $x_{min} = m - 1$; $y_{min} = -(m+1)$ și dreapta este $y = -x - 2$. **60.** a) $\Delta > 0$, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$: $\Delta = 4$; b) Se pun condițiile $\Delta > 0$, $af(1) > 0$, $-\frac{b}{2a} < 1$ se obține $m \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$. **61.** Se pun condițiile $a > 0$ și $\Delta < 0$; $m \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \Rightarrow m \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. $m \in (1, +\infty)$. **62.** Condițiile care se pun sînt $\Delta < 0$ și $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S < 0$, $P > 0$. Se obține $m \in (1, +\infty)$. **63.** Se pun condițiile de la exercițiul **62**; $m \in \left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **64.** Se pun condițiile de mai sus; $m \in (1, +\infty)$. **65.** $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$. **66.** Se pun condițiile $\Delta < 0$, $a > 0$ sau $\Delta > 0$, $a > 0$, $S < 0$, $P > 0$ și se găsește $m \in [2, +\infty)$. **67.** $\Delta < 0$, $a < 0$; $m \in \left(1, \frac{5}{3}\right)$. **68.** Se pun condițiile $\Delta \leq 0$, $a < 0$; $m \in (-\infty, -1]$. **69.** Cele două ecuații au aceleași soluții deci $\frac{m}{n-1} = \frac{3m-4}{n-1} = \frac{-6(m-1)}{3(2n-4)}$ și se obține $m = 2$ și $n = \frac{5}{3}$. **70.** Se procedează ca la exercițiul de mai sus; $m = 2$, $n = 1$. **71.** Pentru a fi îndeplinită condiția ecuațiile trebuie să aibă o rădăcină comună sau două. Două nu pot să aibă deoarece coeficienții nu sînt proporționali. Pentru prima condiție $m_1 = -19$, $m_2 = 5$. **72.** Ecuațiile au o rădăcină comună; $m_1 = -1$, $m_2 = -2$, se verifică că $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$. **73.** $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{2\}$. **74.** Rădăcinile au pozițiile următoare față de 1: $x_1 < 1 < x_2$, $1 < x_1 < x_2$, deci $m \in (-\infty, -2]$. **75.** Rădăcinile au poziția față de 1: $1 < x_1 < x_2$; $m \in [-3, -2\sqrt{2})$. **76.** Trebuie $\Delta < 0$ sau $x_1 < x_2 < 1$; $m \in (-2, +\infty) - \{2\}$. **77.** $x_1 < x_2 < -1$; $m \in (2\sqrt{2}, 3]$. **78.** Pozițiile lui x_1 și x_2 față de -1 sînt: $x_1 < -1 < x_2$; $x_1 < x_2 < -1$; $m \in (-\infty, 0]$. **79.** $\Delta < 0$ sau $-1 < x_1 < x_2$; $m \in (0, +\infty)$. **80.** Discriminantul ecuației este pozitiv și suma și produsul rădăcinilor sînt pozitive. **81.** Se arată că $\Delta \geq 0$; $\Delta = [a^2 + (b-c)^2][a^2 + (b+c)^2]$. **82.** $x_1 < 2 < x_2$; $m \in \left(-\infty, \frac{-22}{3}\right] \cup (5, +\infty)$. **83.** $x_1 < 1 < x_2$; $m \in [-1, 1]$. **84.** Pozițiile rădăcinilor față de -1 și 1 sînt: $-1 < x_1 < x_2 < 1$ sau $-1 < x_1 < 1 < x_2$ sau $x_1 < -1 < x_2 < 1$; $m \in [-1, +\infty)$. **85.** $-1 < x_1 < x_2 < 1$;

$m \in \left[\frac{-5}{4}, -1\right)$. **86.** $f(-1)\ f(1) < 0$; $m \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$. **87.** Trebuie $\Delta < 0$ sau $x_1 < x_2 < 0 < 1$; $0 < 1 < x_1 < x_2$; $x_1 < 0 < 1 < x_2$; $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. **88.** $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$ atunci $\Delta_3 \geq 0$, $\Delta_1 = b^2 - 4ac$; $\Delta_2 = b'^2 - 4a'^2c'^2$, $\Delta_3 = b^2b'^2 - 4aa'cc'$. Se obține $b^2b'^2 - 4b^2a'c' - 4acb'^2 + 16aca'c' \geq 0$ rezultă că $b^2b'^2 - 4aa'cc' \geq 4a'c'b^2 + 4acb'^2 - 20aa'cc' \geq 0$ și ținînd cont de $b^2 - 4ac \geq 0$ și $b'^2 - 4a'c' \geq 0$ se obține $\Delta_3 \geq 0$. **89.** $x_1 < x_2 < 1$; $m \in (-\infty, -1)$. **90.** $0 < x_1 < x_2 < 1$; $m \in \left(\frac{5}{4}, 2\right)$. **91.** $\Delta < 0$ sau $x_1 < 0 < 1 < x_2$; $0 < 1 < x_1 < x_2$; $x_1 < x_2 < 0 < 1$; $m \in (-2, 3) \setminus \{-1, 2\}$. **92.** $5 < x_1 < x_2 < 7$; $5 < x_1 < 7 < x_2$; $x_1 < 5 < x_2 < 7$; $m \in [5; 5{,}4]$. **93.** a) $x = 1$, $y = 2$; b) $x = 0$, $y = 0$; $x = \frac{5}{9}$, $y = \frac{5}{27}$; c) $x = 1$, $y = 2$; $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{9}{4}$; d) $x = \frac{-2}{3}$, $y = \frac{-13}{3}$; $x = 1$, $y = -1$. **94.** a) $x = 2$, $y = 1$; $x = -2$, $y = -1$; $x = \frac{7}{5\sqrt{7}}$, $y = \frac{19}{5\sqrt{7}}$; $x = \frac{-7}{5\sqrt{7}}$; $y = \frac{-19}{5\sqrt{7}}$; b) $x = 1$, $y = 2$; $x = -1$, $y = -2$, etc. c) $x = 3$, $y = 4$, $x = -3$, $y = -4$; d) $x = 1$, $y = 6$; $x = -1$, $y = -6$; e) $x = \frac{p}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$, $y = \frac{q}{\sqrt[3]{p^2 + pq + q^2}}$; f) $x = 1$, $y = 1$; g) $x = 2$, $y = 1$; $x = -1$, $y = -2$; h) $x = 16$, $y = 4$; $x = y$, $y = 16$; i) $x = 2$, $y = -5$; $z = -4$; $x = -2$, $y = -1$, $z = 0$; j) $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$; k) $x = 2$, $y = -1$, $z = -3$; $x = -2$, $y = 1$, $z = 3$. **95.** Se substituie x din ecuația a doua în prima și se obține $2y^2 - 2y(a - z) + z^2 + a^2 - z(1 + 2a) = 0$. Se pune condiția că ecuația în y să aibă o singură soluție reală deci $\Delta_y = 0$ și se obține: $-4(z^2 + a^2) + 8z(1 + a) = 0$. La fel $\Delta_z = 0$ și se obține $a = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$. **96.** Se substituie z din prima ecuație în ecuația a doua și se ajunge la $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0$, adică $x = 1$ și $y = 1$ și $z = -1$. **97.** a) $x = 5$, $y = 7$; b) $x = 2$, $y = -3$; $x = 3$, $y = -2$; c) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{5}$; $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{2}$; d) $x = 2$, $y = 5$; $x = 5$, $y = 2$; e) Se descompun primii membri ai ecuațiilor și se formează patru sisteme de ecuații și se obține: $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$; $x = -1$, $y = -1$; $x = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$; f) $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$; g) $x = 1$, $y = 1$; h) Se împart cele două ecuații și se ajunge la ecuația $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ și se obțin soluțiile $x = 2$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 2$; i) $x = 0$, $y = 0$, $z = a$; $x = 0$, $y = a$, $z = 0$, $x = a$, $y = 0$, $z = 0$. **98.** Se împarte prima ecuație la celelalte două și se obțin ecuațiile $y = 2x$, $z = 3x$. Se substituie în prima ecuație și se găsește $x = \frac{1}{\sqrt[10]{648}}$,

$y = \frac{2}{\sqrt[10]{648}}$, $z = \frac{3}{\sqrt[10]{648}}$. **99.** Se ridică la puterea p şirul de rapoarte egale, se aplică proprietatea şirului de rapoarte egale şi se obţine: $\frac{x_k^p}{a_k^p} = \frac{b^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}$ deci $x_k = \frac{a_k b}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}}$. **100.** a) Se rezolvă ecuaţia a doua ţinînd cont de prima şi se obţine $x = 1$, $y = 1$ etc.; b) Se ţine cont de cazurile $x < 1$, $y < 1$; $1 < x < 2$, $y < 1$; $x > 2$, $y > 1$; $x < 1$, $y > 1$; $1 < x < 2$, $y > 1$; $x > 2$, $y > 1$ şi se obţine $x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}$, $y = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ etc. **101.** Se înmulţesc ecuaţiile între ele şi se obţine: $x_1 x_2 \ldots x_n = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}$; se împarte ecuaţia obţinută cu fiecare ecuaţie în parte şi se obţine $x_i = \sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{a_i}}$.
102. Scriem $2\sqrt{x_1 - 1} + 2 \cdot 2^2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2n^2\sqrt{x_n - n^2} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$; $(\sqrt{x_1 - 1} - 1)^2 + (\sqrt{x_2 - 2^2} - 2^2)^2 + \ldots + (\sqrt{x_n - n^2} - n^2)^2 = 0$. Se egalează fiecare termen cu zero. **104.** $A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 2ax + a^2)$; $y_m = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **105.** Se aplică relaţia lui Stewart în ΔMBC, $MD = x$ (fig. 16). $MB^2 \cdot CD + MC^2 \cdot BD = MD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$. $AD = m$. $MB^2 + MC^2 = 2MD^2 + 2BD^2$. Adunînd MA^2 la ambii membri, se obţine $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA^2 + 2MD^2 + 2BD^2$; $MA^2 + MB^2 + MC^2$ va fi minimă cînd $MA^2 + 2MD^2 = (m - x)^2 + 2x^2$ este minimă ($BD = $ ct) $\Rightarrow x = \frac{m}{3} \Rightarrow MD = \frac{AD}{3}$. **106.** Se notează cu $d(A, M) = x$, $d(M, B) = 20 - x$ şi se găseşte $x_1 = 200$ m, $x_2 \simeq 10{,}5$ $\left(y_1 = \frac{100\,k}{x^2},\ y_2 = \frac{81\,k}{(20 - x)^2}\right)$ reprezentînd intensitatea luminoasă a sursei A respectiv B). **107.** O centrul cercului. Se notează $OM = x$, $MB = 10 - x$. Se găseşte $\mathcal{A} \leqslant 50\pi$ cm² (deci M coincide cu O (centrul cercului)). **108.** $R_1 = \frac{x}{2}$, $R_2 = \frac{20 - x}{2}$, $\mathcal{A} = \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(20 - x)^2}{4}$ aceasta este minimă $\mathcal{A} \geqslant 50\pi$, pentru $x = 10$ (fig. 17).

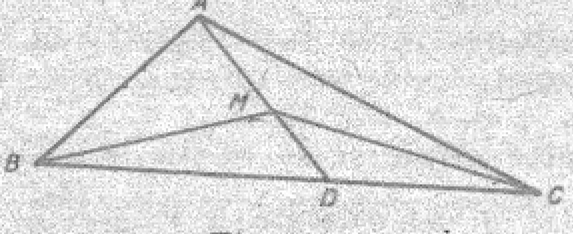


Fig. 16.

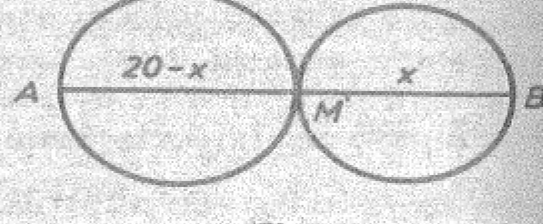


Fig. 17.

109. $\mathcal{A} = Ll = 60L - L^2$, $L^2 - 60L + \mathcal{A} = 0$, $L \in \mathbf{R}$; $\mathcal{A} \leqslant 900$ m² pentru $L = 30$, $l = 30$ m. **110.** Se notează $|BC| = a$, $|AD| = h$, $|PQ| = x$, $|MQ| = y$, $|AE| = h - y$ (fig. 18). $A_{MNPQ} = xy$ şi se obţine din asemănarea triunghiurilor $x = \frac{a}{h}(h - y)$. Atunci $ay^2 - ayh + Ah = 0$,

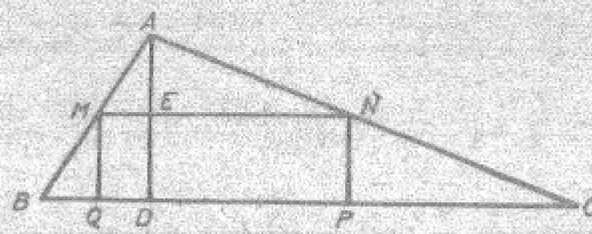


Fig. 18.

se pune condiţia ca $\Delta \geqslant 0$ şi se obţine $\Delta \geqslant \frac{ah}{4}$ şi aceasta pentru $y = \frac{h}{2}$ (tăierea se face la jumătatea înălţimii). **111.** $\mathcal{P} = 2L + 2l$, $\mathcal{A} = Ll$ şi se obţine $2l^2 - \mathcal{P}l + 162 = 0$, $L \in \mathbf{R}$, se pune condiţia ca $\Delta_l \geqslant 0$ şi se obţine $\mathcal{P} \geqslant 36$, $\mathcal{P} = 36$ pentru $l = 9$ şi dreptunghiul devine pătrat în acest caz. **112.** Se notează cu x, y minimul de zile în care poate transporta marfa prima maşină respectiv a doua maşină. Se obţine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ şi $2\,400\,x + 5\,400\,y = k$ (cantitatea de benzină măsurată). Se obţine $2\,400\,x^2 + 15\,000\,x = k(x - 5)$. Se pune condiţia ca $\Delta \geqslant 0$ şi se obţine k (minim) $= 720$ litri pentru $x = 12\frac{1}{2}$ zile şi $y = 8\frac{1}{3}$ zile. **113.** Notăm $AC = x$, atunci $BC = 7 - x$, $AD = y$ şi $BD = 5 - y$ ($D \in |AB|$, fig. 19); se găseşte $I = \frac{\sqrt{-24x^2 + 168x - 144}}{5}$ şi $\mathcal{A} = \sqrt{-6x^2 + 12x - 36}$. Aria este maximă adică $\mathcal{A} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ dacă $x = \frac{7}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ şi $I = \sqrt{6}$. **114.** Fie înălţimea AD (fig. 20). Notăm: $BD = x$, $BC = m$. Perimetrul este $2p$. Dacă S este aria atunci $S = rp \Rightarrow r = \frac{S}{p}$. r va fi maximă cînd $S = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{x(m - x)}m}{2}$ va fi maxim. $x(m - x)m^2 = -m^2x^2 + m^3x$ va fi maxim pentru $x = -\frac{m^3}{-2m^2}$, $x = \frac{m}{2}$. $BD = \frac{BC}{2}$.



Fig. 19.



Fig. 20.

PUTERI ŞI RADICALI

1. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{144}{121}$; c) $\frac{82}{3}$; d) $\frac{5}{6}$. **2.** a) $\frac{(3x-2y)(a+b)}{a^2b^2+y}$; b) $\frac{xy(b-a)}{ab}$; c) $\frac{x+y}{x-y}$; d) $\frac{1}{a-1}$; e) $\frac{(b-a)^3+a^3}{(b-a)^4}$. **3.** a) $\frac{9}{74}$; b) $\frac{16}{9}$. **4.** $80\,xyz(x^2+y^2+ z^2)$. **8.** $16[ab(a^2+b^2)-cd(c^2+d^2)]$. **11.** a) primul este mai mare; b) primul este mai mare; c) primul este mai mare; d) sînt egale; e) primul este mai mare. **13.** Dacă n este par funcţia nu este injectivă şi nici surjectivă; dacă n este impar funcţia este injectivă şi surjectivă. **15.** a) $|x+2|$; b) $||x|-3|$; c) $|-2x^2+3x-1|$; d) $||x|^2-3x+2|$. **16.** a) Dacă $x<-2$ suma este $-2x$; dacă $x\in[-2, 2]$ suma este 4; dacă $x>2$ suma este $2x$; b) Dacă $x<-3$ suma este -5; dacă $x\in[-3, 2]$ suma este $2x+1$; dacă $x>2$ suma este 5; c) Dacă $x\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]\cup[1, +\infty)$ suma este $3x^2-2x+3$; dacă $x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ suma este $-x^2+4x+1$. **17.** Vezi exerciţiul **16.**

18. a) $x\in[1, +\infty)$; b) $x\in\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$; c) $x\in\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]$; d) $x\in\mathbf{R}$; e) $x\in\mathbf{R}$; f) $x\in\mathbf{R}$; g) $x\in(-\infty, 1]\cup[4, +\infty)$; h) $x\in(-\infty, \sqrt{2}]$; i) $x\in[1, 2]\cup[3, +\infty)$; j) $x\in[5, +\infty)$; k) $x\in(-\infty, -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}, +\infty)$; l) $x\in[-2, +\infty)$, m) $x\in(-\infty, -9]\cup[5, +\infty)$. **19.** a) al doilea; b) al doilea; c) egale; d) primul; e) al doilea; f) al doilea; g) primul. **20.** a) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[12]{280}$; b) $\sqrt[4]{54}, \sqrt{8}, \sqrt[3]{25}$; c) $\sqrt[12]{75}; \sqrt[3]{4}, \sqrt{3}$. **21.** minus; plus; minus; minus; dacă $m>n^2$ este pozitiv, iar dacă $m<n^2$ este negativ. **22.** a) primul; b) al doilea. **23.** a) $6(7\sqrt{10}-29)$; b) 1. **24.** a) Se ridică ambii membri la pătrat; b) Membrul stîng este egal cu $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{5}}}\sqrt[3]{2-\sqrt[5]{32}}$, iar membrul drept este egal cu $\frac{1}{\sqrt[5]{5^2}}(1+\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3^2})$. **25.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **26.** $\sqrt{7}+\sqrt{2}$. **27.** $\sqrt{4a+1}=\sqrt{(4a+1)\cdot 1}\leqslant\frac{1}{2}[(4a+1)+1]=2a+1$. Analog, $\sqrt{4b+1}\leqslant 2b+1$, $\sqrt{4c+1}\leqslant 2c+1$. Adunăm apoi inegalităţile membru cu membru. **28.** a) $\frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$; b) $\frac{(x-2)\sqrt{x+4}}{(x+2)\sqrt{x-4}}$; c) $\frac{x+\sqrt{y+2}}{x-1}$. **29.** Numărătorul se mai poate scrie $a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+b^{m-1})$. După simplificare se obţine $a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+b^{m-1}$ şi ţinînd cont de $a>b>0$ se obţin inegalităţile. Făcînd $a=n+2$, $b=n+1$ şi $m=n+1$ obţinem $(n+1)(n+2)^n>(n+2)^{n+1}-(n+1)^{n+1}$, de unde $(n+1)^{n+1}>(n+2)^n$, deci $\sqrt[n]{n+1}>\sqrt[n+1]{n+2}$. **30.** a) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt[4]{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}+1)$; b) $3+2\sqrt{2}$; c) $4-2\sqrt{3}$; d) $\sqrt{5}-2$; e) $\sqrt{3}-1$; f) $5+3\sqrt{2}$. **31.** Se aplică formula radicalilor compuşi şi se arată că numărul este 6.

32. a) $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; b) $\frac{5(\sqrt[3]{4}+\sqrt{3})(2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{4}+9)}{-23}$;
c) $\sqrt[3]{2}-1$; d) $\frac{1+\sqrt[3]{2}}{3}$; e) $\frac{\sqrt{6}(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{6}$.
f) $\frac{3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{6}+12}{23}$ **34.** $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<1{,}6+1{,}2=$ $=2{,}8<2\sqrt[3]{3}$. **35.** Se aplică formula radicalilor compuşi şi se obţine numărul egal cu $\frac{7}{13}$. **36.** Se aplică formula $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.
37. a) Se notează numărul cu u şi se ridică la puterea a treia de unde $u=2\sqrt{2}$; b) $u=-2$; c) $u=2\sqrt{2}$; d) $u=1$. **38.** a) $\frac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}$; b) $(\sqrt[8]{5}-$ $-\sqrt[8]{3})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$; c) $\frac{\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}-1\right)\sqrt{5}}{10}$;
d) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$; e) $\sqrt{(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})(5\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{25}+9)}$; f) $-\frac{1}{18}(\sqrt[3]{3}+$ $+\sqrt{3})(3\sqrt[3]{3}+9\sqrt[3]{9}+9)$; g) $\frac{3-\sqrt[4]{27}}{6}$; h) $-\frac{1}{252}(\sqrt[3]{9}+9)$.
39. Punem $\sqrt[3]{a}=u$, $\sqrt[3]{b}=v$, $\sqrt[3]{c}=w$ şi folosim identitatea u^3+ $+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)(u^2+v^2+w^2-vw-wu-uv)$. Obţinem

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{ac}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Mai departe înmulţim numărătorul şi numitorul ultimei fracţii cu $(a+b+$ $+c)^2+3\sqrt[3]{abc}(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. **40.** Se poate proceda ca la exerciţiul precedent. **41.** I) Pentru raţionalizare se aplică formula $x^n-y^n=$ $=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})$; Se obţine $\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a^n-b}$;
II) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a(a-1)}$. **42.** $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=$
$=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\sqrt{x-1}+1$;
$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}-1|$; expresia este egală cu $\frac{2}{2-x}$.
43. a) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1$, dacă $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$; $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}}$, dacă $x\in[1,+$ $+\infty)$; b) $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. **44.** Din condiţiile de existenţă ale rădăcinilor x^3+ $+1\geqslant 0$, $1-x^2\geqslant 0$, $\sqrt[3]{x^2+7}-2\geqslant 0$ rezultă $x=-1$, care verifică ecuaţia. **45.** a) Ecuaţia nu are soluţii; b) $x=3$. **46.** a) $x=\frac{-15-\sqrt{5}}{2}$,
b) $x=\frac{-5}{8}$; c) $x=-2$; d) $x=2-\sqrt{2}$; e) $x=2$; f) $x_1=3$, $x_2=\frac{2}{3}$;
g) $x=3$. **47.** $x_1=a$, $x_2=-a$. **48.** Se obţine $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}$, $x_{3,4}=$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}$. **49.** a) $x = \frac{16}{25}$; b) $x = -\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$; c) $x_1 = \frac{15 + 4\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 1$. **50.** $x = \frac{4 - a}{2\sqrt{2(2 - a)}}$, pentru $0 \leqslant a \leqslant 4/3$.

51. Dacă $2a + 2b - c \neq 0$, atunci $x = \frac{(c - a - b)^2 - 4ab}{4(2a + 2b - c)}$, cu condiția ca $x \geqslant a + b - c$, este o soluție a ecuației. Dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluții. Dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a = b$, atunci oricare $x > -a$ este o soluție a ecuației. **52.** a) $x = 3$; b) $x = 0$; c) $x = 5$. **53.** Pentru $a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ecuația are soluția $x = \frac{1}{2a - 1}$ **54.** Dacă $c > 0$ și $c^2 \geqslant |a - b|$ ecuația are soluția $x = \frac{(c^2 + b - a)^2 - 4bc^2}{4c^2}$. Dacă $c = 0$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluție, iar dacă $c = 0$ și $a = b$, ecuația este nedeterminată. **55.** a) $x = 3$; b) $x = 15$. **56.** Dacă $(b - c)(a' - a) \neq 0$, ecuația are soluția $x = \frac{c - b'}{a' - a} = \frac{b - c'}{a' - a}$, cu condiția ca numerele de sub radicali să fie pozitive (adică, $a' - a$, $ca' - ab'$ și $ba' - ac'$ să aibă același semn). Dacă $b = c$ și $b' = c'$ ecuația este nedeterminată. Dacă $a = a'$ și $b \neq c$ sau măcar $b' \neq c'$ ecuația este imposibilă. **57.** Ecuația are ca soluție $x = 1 + \frac{a^2(2 - a)^2}{4(a - 1)^2}$, pentru $a \in (1, 2]$. 58. $x = \frac{n}{(a/b)^{\frac{n+1}{n}} - 1}$, dacă $a, b \neq 0$, n impar. Dacă n este par, ecuația are aceeași soluție x, cînd $ab > 0$ și $a > b$. **59.** Rezultă din identitatea $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = \frac{1}{2}(u + v + w)[(v - w)^2 + (w - u)^2 + (u - v)^2]$, în care se înlocuiește u, v, w respectiv cu $\sqrt[3]{E(x)}$, $\sqrt[3]{F(x)}$, $-\sqrt[3]{G(x)}$. **60.** Se folosește problema **59** și se găsește $x^2 = \frac{(a + b)^2 (a - b)}{27\, b}$, pentru $b \neq 0$. Dacă $b = 0$ și $a \neq 0$ ecuația nu are soluții, iar dacă $a = b = 0$ ecuația este nedeterminată. **61.** După problema **59** orice soluție a ecuației date este soluție a ecuației $(3x + a + b + c)^3 = 27(x + a)(x + b)(x + c)$, sau $9[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)]x = 27\,abc - (a + b + c)^3$. **62.** a) Se notează $\sqrt[3]{2 - x} = a$ $\sqrt[3]{7 + x} = b$ și se aplică formula $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$. Se obține $x = 1$; b) Se procedează analog ca la punctul precedent. Se obține $x = 3$;c) Se aplică exercițiul **59** și se obține $x = -1$; d) $x = -\frac{3}{13}$. **63.** Demonstrația este analoagă celei de la exercițiul **59**. **64.** Se aplică exercițiul **63** și se obține $x = -\frac{19}{27}$. **65.** II). Scriem ecuația astfel $x - \sqrt{b - x}\sqrt{c - x} = \sqrt{a - x}(\sqrt{b - x} + \sqrt{c - x})$. Pentru ca un număr x diferit de a, b, c să fie soluție a ecuației date este necesar și suficient ca el să fie soluția ecuației obținută prin ridicarea la pătrat a celor doi membri ai ecuației scrise

ca mai înainte, $x - \frac{\alpha}{2a} = \sqrt{b-x}\sqrt{c-x}$ şi să verifice condiţia $x > \sqrt{b-x}\sqrt{c-x}$, sau încă să fie soluţie a ecuaţiei $\left(x - \frac{\alpha}{2a}\right)^2 = (b-x)(c-x)$ şi să verifice condiţiile: $2 < b$, $x < c$, $x > \frac{\alpha}{2a}$.

66. $x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}$, pentru $0 < a < \frac{1}{4}$. **67.** a) Se ridică la puterea a treia ambii membri ai ecuaţiei. Se obţine $x = 25$; b) $x = 1$; c) $x = 4$; d) $x = 9$. **68.** a) Se notează $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = t$ şi se obţine ecuaţia $t^2 - 2t + 1 = 0$. Avem $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$; b) $x_1 = 4$, $x_2 = 1$; c) $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. **69.** Ecuaţia nu are soluţii. **70.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; c) nu are soluţii; d) $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{55}}{3}$. **71.** Ecuaţia nu are soluţii. **72.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{-9}{7}$; b) $x = 2$; c) $x = 8$; d) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{-2+\sqrt{5}}{3}$, $x_4 = \frac{-2-\sqrt{5}}{3}$; e) $x = -1$. **73.** a) Din condiţiile de existenţă ale rădăcinilor rezultă că ecuaţia nu are soluţii; b) Scriem condiţiile de existenţă ale radicalilor; rezultă $x = 6$. **74.** a) Se notează $2 - x = u^3$, $x - 1 = v^2$ şi se obţine sistemul $u + v = 1$, $u^3 + v^2 = 1$ de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, $x_3 = 1$; b) Se procedează ca la punctul a) şi se obţine $x_1 = 3$, $x_2 = 4 - (-1 + \sqrt{3})^3$, $x_3 = 4 + (1 + \sqrt{3})^3$); c) $x = 25$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **75.** $x_1 = 7$, $x_2 = 38$. **76.** a) Se notează $\sqrt[5]{x + \sqrt{x^2 - 1}} = t$ şi se obţine ecuaţia $t^2 + 2t + 1 = 0$. Rezultă $x = 1$; b) Ecuaţia se poate scrie $\left(\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}} - \sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2 = 0$. Dacă notăm $\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+a}} = t$, se obţine $t = \pm\frac{1+a}{1-a}$, de unde $x = -a$; c) Se aduce la acelaşi numitor şi se obţine $x = \frac{a(\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b})^7}{1 - (\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b})^7}$; d) $\frac{2x+1}{ax-1} \geqslant 0$ şi se obţine o sumă de trei numere pozitive care nu poate fi egală cu zero. Deci ecuaţia nu are soluţii; e) Se ridică la puterea a treia ambii membri ai ecuaţiei şi se obţine: $x = \pm\sqrt{\frac{8a^3 + 15a^2b + 6ab^2 - b^3}{2+b}}$; f) $\frac{15a^2b - b^3 + 6ab^2 + 8a^3}{27b}$. **77.** a) Se împarte ecuaţia cu $\sqrt[n]{x^2 - 1}$. Se obţine $x_1 = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$, $x_2 = \frac{1 + 2^n}{1 - 2^n}$; b) Se împarte ecuaţia cu $\sqrt[n]{1 + x^3}$ şi se notează $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x+x^2}} = t$. Se obţine ecuaţia $t^2 - t - 1 = 0$ de unde

se obțin ecuațiile $\frac{1+x}{1-x+x^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $\frac{1+x}{1-x+x^2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; c) Se împarte ecuația cu $\sqrt[m]{a^2-x^2}$ și se notează $\sqrt[m]{\frac{x+a}{a-x}}=t$. Se obține $t_1=2$, $t_2=1$ și ecuațiile $\frac{x+a}{a-x}=2^m$; $\frac{x+a}{a-x}=1$; d) Ecuația se scrie $\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^2}-2\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^2}=\sqrt[4]{1-(\sqrt{x})^2}$ și se împarte cu $\sqrt[4]{1-(\sqrt{x})^2}$. Se notează $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}=t$, se obține ecuația $t^2-t-2=0$, de unde $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}=2$; e) Ecuația se mai poate scrie $\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^2}-2\sqrt[4]{(1-\sqrt[3]{x})^2}=\sqrt[4]{1-(\sqrt[3]{x})^2}$. Se împarte ecuația cu $\sqrt[4]{1-(\sqrt[3]{x})^2}$ și se obține aceeași ecuație în t ca la punctul d); f) Se procedează ca la punctele anterioare. **78.** Dacă $a=0$, $x\in(-\infty, 0)$; dacă $a>0$, $x\in[a,+\infty)$; dacă $a<0$, $x\in(-\infty, a]$. **79.** a) $x\in(-\infty, 5]\cup[50,+\infty)\cap(14,+\infty)\cap(2,+\infty)$, de unde $x\in[50,+\infty)$; b) $x\in(-\infty,-7]\cup[0,+\infty)\cap\left(-\infty,\frac{29}{2}\right)\cap\left(-\infty,\frac{841}{144}\right)$, de unde $x\in(-\infty,-7)$; c) $x\in(2,+\infty)$; d) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(2,+\infty)$. **80.** $x\in(34+\sqrt{1188},+\infty)$; b) $x\in\left(-2,\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(-1,\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$; c) $x\in(-6, 0)\cup(3, 4)$; d) $x\in\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **81.** a) Din condițiile de existență ale rădăcinilor rezultă $x_1=5$; b) $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)-\{7-\sqrt{40}, 7+\sqrt{40}\}$; c) $x\in\left[-7,-6+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$; d) $x\in\left[-1,\frac{11}{4}\right)$; e) $x\in(10,+\infty)$; f) Din condițiile de existență ale radicalilor rezultă $x\in[3,+\infty)$. Prin ridicare la pătrat se obține $35x^2-37x+21>0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$; deci $x\in[3,+\infty)$; g) Din condițiile de existență ale radicalilor rezultă $x\in[1,+\infty)$. Funcția se scrie $\frac{1}{|\sqrt{x-1}+1|}+\frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|}>2$. Dacă $x\in(1, 2)$ rezultă inecuația $2-x<1$, deci $x\in(1, 2)$. Dacă $x\in(2,+\infty)$, atunci $x^2-5x+5<0\Rightarrow x\in\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. Deci $x\in\left(2,\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. În concluzie $x\in\left(1,\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\setminus\{2\}$. **82.** a) $\sqrt[6]{2^5}$; b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$. **83.** I) 1; II) $-2\left(\frac{1-a^2}{1-\sqrt{a}}\right)^2$; III) $a^{2/3}$. **84.** I) Dacă a, b, c, d sînt pozitive se obține $4a^2c\sqrt{3d}$. Dacă a, b, c oarecare și $d>0$ se obține $\sqrt{3d}\left[a^2c+a\,|a|\cdot|c|-a^2\frac{c^2}{|c|}\right]$; II) $24\,a^{\frac{31}{15}}\,b^{\frac{31}{15}}\,c^{-\frac{1}{15}}\,d^{-\frac{1}{3}}$.

85. I) Expresia devine $\sqrt{ab}\,(a+b-\sqrt{ab})$. Pentru $a=\frac{6}{5}$, $b=\frac{3}{5}$ se obține $\frac{27\sqrt{2}-18}{25}$; II) -1; III) $\frac{\sqrt{a}\,(1+a)}{a}$; IV) Dacă $a, b>0$, se obține $\frac{2b\,|a-b|}{a+b-|a-b|}$. Dacă $a, b<0$, se obține $\frac{2b\,|a-b|}{-a-b-|a-b|}$. 86. a) $41 \leqslant \sqrt[3]{72351} < 42$; b) $1{,}5 \leqslant \sqrt{2{,}5} < 1{,}6$; c) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$. 87. I) Să verificăm de exemplu, inegalitatea din stînga. $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<$ $<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Analog, se verifică cealaltă inegalitate. II). Acum, scriem $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}>1+2\,[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$ $+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{1\,000\,000})]=1+2(\sqrt{1\,000\,001}-$ $-\sqrt{2})>2\cdot 1\,001-\sqrt{8}+1>2\,000-3+1=1998$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la pct. I) rezultă că numărul este <1999. Deci partea întreagă a numărului este 1998. 88. Analog, cu problema precedentă (pct. I)), rezultă $\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}>$ $<2\,[(\sqrt{10\,001}-\sqrt{10\,000})+(\sqrt{10\,002}-\sqrt{10\,001})+\ldots+(\sqrt{1\,000\,001}-$ $-\sqrt{1\,000\,000})]=2(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{10\,000})>2(1\,000-100)=1800$. Analog rezultă $s<1800{,}02$. Deci $1800<s<1800{,}02$. 89. I) Avem $\left(1+\frac{2}{3n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, de unde $1+\frac{2}{3n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}$. Înmulțind inegalitatea cu $n^{2/3}$, se obține $n^{2/3}+\frac{2n^{-1/3}}{3}>(n+1)^{2/3}$, de unde $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\,[\sqrt[3]{(n+1)^2}-$ $-\sqrt[3]{n^2}]$. Analog, plecînd de la inegalitatea $\left(1-\frac{7}{3n}\right)^3>\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$ se obține $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\,[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}]$; II) Folosim inegalitatea din stînga de la pct. I) și scriem $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}>\frac{3}{2}\;(\sqrt[3]{5^2}-$ $-\sqrt[3]{4^2})+\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{5^2})+\ldots+(\sqrt[3]{(1\,000\,001)^2}-\sqrt[3]{(1\,000\,000)^2})=$ $=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1\,000\,002\,000\,001}-\sqrt[3]{16})>\frac{3}{2}.10000-\sqrt[3]{54}>15\,000-4=14\,996$. Analog, folosind inegalitatea din dreapta de la pct. I), se obține că numărul este <14997. Deci partea întreagă a numărului este 14 996. 90. $(-1, 1)$.

91. a) $x = \frac{5}{8}$, $y = \frac{3}{8}$; b) $x_1 = 4$, $y_1 = 4$ și $x_2 = 5$, $y_2 = 4$; c) $x = 1$, $y = 1$, d) $x_{1,2} = \pm \frac{10\sqrt{3}}{3}$, $y_{1,2} = \pm \frac{8\sqrt{3}}{2}$; $x_{3,4} = \pm 5$, $y_{3,4} = \pm 4$ (semnele se corespund); $x_{5,6} = \pm 10\sqrt{3}$, $y_{5,6} = \mp 8\sqrt{3}$; $x_{7,8} = \pm 15$, $y_{7,8} = \mp 12$ (semnele alternează); e) $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; f) $x = 3$, $y = 1$.

Capitolul VII
NUMERE COMPLEXE

1. a) $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$; b) $x = 1$, $y = 1$; c) $x = 0$, $y = 0$; d) $x = -5$, $y = 11$; e) $x_1 = \sqrt{17}$, $y_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\sqrt{17}$, $y_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \sqrt{7}$, $y_3 = 3$; $x_4 = -\sqrt{7}$, $y_4 = 3$; f) $x_1 = a$, $y_1 = b$; $x_2 = \frac{3a - 4b + 2}{5}$, $y_2 = \frac{-4a - 3b + 14}{5}$. **2.** a) $3 - 4i$; $3 + 4i$; $2 - 11i$; $2 + 11i$; b) $18 - 6i$, $14 - 7i$, $33 - 11\sqrt{2}i$; c) $-\frac{7}{29} + \frac{32}{29}i$; $\frac{12}{5} + \frac{6}{5}i$; $\frac{52}{145} + \frac{44}{145}i$; $\frac{61}{13} + \frac{4}{13}i$; d) $-1 + 3i$; -1. **5.** a) $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Dacă $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n = 1$, dacă $n = 3k$; $\varepsilon_1^n = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2^n = \varepsilon_2$, dacă $n = 3k + 1$; $\varepsilon_1^n = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2^n = \varepsilon_1$, dacă $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$; b) Pentru $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ se obține $-\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$, respectiv $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ se obține $-\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectiv $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$; c) $a^3 + b^3$, respectiv $a^2 - ab + b^2$; d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. **7.** $z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_1z_2 = \frac{5}{18} + \frac{\sqrt{2}}{18}i$; $z_1/z_2 = -\frac{6}{5} + \frac{6\sqrt{2}}{5}i$; $z_1^2 + z_2^2 = -\frac{29}{36} + \frac{7\sqrt{2}}{18}i$; $z_1^3 + z_2^3 = -\frac{7}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8}i$; $z_1^4 + z_2^4 = \frac{1}{36^2}(265 - 892\sqrt{2}i)$; $z_2^5z_1^{-3} = -\frac{5^3}{12 \cdot 6^3}(1 + \sqrt{2}i)$. **8.** $\{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi,\ a + b = 1\}$. **9.** a) $-i$; b) $\frac{8ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}i$; c) $\frac{3a^2 - 1}{4a^2 + 1}(2a - i)$. **10.** a) 2^{100}; b) 2, pentru $n = 4k$; 0, pentru $n = 4k + 1$; -2, pentru $n = 4k + 2$; 0, pentru $n = 4k + 3$ $(k \in \mathbb{N})$; c) $2(1 - i)^n$; d) $(2 + i)^n + (2 - i)^n$. **11.** a) 2; b) -1; c) -1; d) 2. **12.** a) 2, pentru $n = 3k$; -1, pentru $n = 3k + 1$, -1, pentru $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$;

b) -3, pentru $n = 3k$; 0, pentru $n = 3k + 1$; 0, pentru $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbf{N})$, c) -3, pentru $n = 3k$; 0, pentru $n = 3k + 1$, 0, pentru $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbf{N})$. **13.** Observăm că $i^{4l+1} + i^{4l+2} + i^{4l+3} + i^{4l+4} = 0$ şi $(-1)^{4l+1} i^{4l+1} + (-1)^{4l+2} i^{4l+2} + (-1)^{4l+3} i^{4l+3} + (-1)^{4l+4} i^{4l+4} = 0$, unde $l \in \mathbf{N}$. Obţinem $s_1 = 0$, pentru $n = 4k$; $s_1 = i$, pentru $n = 4k + 1$; $s_1 = i - 1$, pentru $n = 4k + 2$; $s_1 = -1$, pentru $n = 4k + 3$. De asemenea, $s_2 = 0$ pentru $n = 4k$; $s_2 = -i$, pentru $n = 4k + 1$; $s_2 = -i - 1$, pentru $n = 4k + 2$; $s_2 = -1$, pentru $n = 4k + 3$. **14.** Dacă $z = (1 + i)^n + (1 - i)^n$, atunci $\bar{z} = z$, adică $z \in \mathbf{R}$. **15.** $|z| = 16$. **16.** a) $z_1 = 6 + 17i$, $z_2 = 6 + 8i$; b) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; c) $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{4} + \frac{-1 + \sqrt{7}}{4} i$, $z_2 = \frac{-3 - \sqrt{7}}{4} - \frac{1 + \sqrt{7}}{4} i$. **19.** $z_1 = 21 - i$; b) $z_2 = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} i$. **20.** a) $\{z \mid z = x + iy,\ x^2 + (y + 1)^2 - 4 \leqslant 0\}$; b) $\{z \mid z = x + iy,\ x^2 + (y - 2)^2 - 9 > 0\}$; c) $\{z \mid z = x + iy,\ x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0\}$; d) $\left\{z \mid z = x + iy,\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 - \frac{1}{4} > 0 \text{ şi } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{9}{4} < 0\right\}$; e) $\{z \mid z = x + iy;\ x^2 + (y - 1)^2 - 16 > 0\}$; f) $\left\{z \mid z = x + iy,\ \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 < 0\right\}$; g) $\{z \mid z = x + iy,\ x < 0\}$. **21.** a) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1 + \sqrt{3} i$, $x_3 = 1 - \sqrt{3} i$; c) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} i$, $x_3 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} i$; d) $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} i$, $x_3 = -\frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} i$; e) $x_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; f) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3i$, $x_4 = -3i$; g) $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $x_5 = x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$. **22.** Interpretarea geometrică. Într-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu de două ori suma pătratelor laturilor. **23.** Fie $z = a + bi$, $z' = c + di$. Avem $|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geqslant 0$. Mai mult, $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow (ad - bc)^2 = 0 \Leftrightarrow$ există λ, astfel încît $c = \lambda a$ şi $d = \lambda b$. **24.** Se folosesc proprietăţile modulului. **25.** a) Avem $|z| = 4m^2 + 1 \in \mathbf{Q}$; b) $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, unde $m, n \in \mathbf{Z}$. **26.** $z = (a - b)^k \in \mathbf{R}$. **27.** $A = \{(x, y) \in P \mid x^2 + (y - 2)^2 - 36 = 0\}$. **28.** $B = (x, y) \in P \mid (x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 8 = 0\}$. **29.** $C = \left\{(x, y) \in P \mid \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{61}{4} = 0\right\}$. **30.** $D = \left\{(x, y) \in P \mid \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0\right\}$. **31.** $E = \{(x, y) \in P \mid y = -2x + 4\}$. **32.** Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale şi distincte dacă $\Delta_1 = b^2 - 4ac > 0$. Discriminantul ecuaţiei $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0$ este $\Delta_2 = -4a^2\Delta_1 < 0$. **33.** $a \in \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{6}, \frac{3 + \sqrt{33}}{6}\right)$. **34.** $X^4 + X = X(X +$

$+1)\left(X-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $X^3-1=(X-1)\left(X+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; $X^4+16=(X-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(X-\sqrt{2}+$ $+i\sqrt{2})(X+\sqrt{2}+i\sqrt{2})(X+\sqrt{2}-i\sqrt{2})$. **35.** a) $z_1=\frac{-6+\sqrt{21}}{3}+$ $+2i$, $z_2=\frac{-6-\sqrt{21}}{3}+2i$; b) $z=-\frac{7}{6}+4i$. **36.** Avem $(1+ui^{4l+1})(1+$ $+ui^{4l+2})(1+ui^{4l+3})(1+ui^{4l+4})=(1+u^2)(1-u^2)$, $l\in\mathbf{N}$. Dacă $n=4k+1$, sau $n=4k+2$ $(k\in\mathbf{N})$, produsul este imaginar; dacă $n=4k+3$, sau $n=$ $=4k+4$ $(k\in\mathbf{N})$, produsul este real. **37.** $\alpha=(u+iv)^n+i^n(u-iv)^n$. Dacă $n=2k$ $(k\in\mathbf{N})$, α este real; dacă $n=2k+1 (k\in\mathbf{N})$, α este imaginar. **38.** a) $3x^2=y^4$; b) $x^2=3y^4$. **39.** a) Condiția devine $y^3-3x^2y=0$, x^3- $-3xy^2\geqslant 64$; b) Condiția devine $x^3-3xy^2=0$, $|y^3-3x^2y|>64$. **41.** Pentru $z=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i$ se obține cea mai mare valoare a lui $|z|$, $|z|=$ $=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. Pentru $z=-\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{2}i$ se obține cea mai mică valoare a lui $|z|$, $|z|=\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{2}$. **42.** $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=\frac{1}{2}$, $z_4=-\frac{1}{2}$. **43.** Se folosește teorema lui Pitagora. **44.** $A=\{x-$ $-(x+1)i \mid x\in\mathbf{R}\}$. **45.** $A=\{(x,y)\in P \mid (x-1)^2+y^2-2=0\}$. **46.** a) $A=$ $=\{(x,y)\in P \mid y=0\}$; b) $B=\{(x,y)\in P \mid x^2+y^2-1=0\}$. **47.** a) $z=$ $=-\frac{2}{37}-\frac{12}{37}i$; b) $z=-\frac{5}{33}-\frac{29}{33}i$; c) $z=\frac{74\sqrt{3}}{337}+\frac{146}{337}i$; d) $z=-\frac{23}{34}-$ $-\frac{7}{34}i$. **48.** $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i$. **50.** a) $z_{1,2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}i$; b) $z_1=1+i$, $z_2=-1+2i$; c) $z_1=2+i$, $z_2=-4-i$; d) $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}+$ $+i\sqrt{3}$; e) $z_1=3+3i$, $z_2=2-i$. **51.** a) $z_1=2-3i$, $z_2=i$; b) $z_1=2-i$, $z_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$; c) $z_1=\frac{8+19i}{7}$, $z_2=\frac{-18+i}{7}$; d) $z_1=2$, $z_2=1+2i$. **52.** a) $z_{1,2}=1+\alpha\pm\alpha(\alpha+1)i$; b) $z_{1,2}=1\pm\alpha i$. **53.** Rădăcinile sînt: 0, $\pm i$, ± 1. **54.** a) $\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1}$; b) $\frac{X+1}{X-1+i}$; c) $\frac{X^2-2X+5}{X^2-4X+5}$; d) $\frac{X-a+bi}{X+bi}$. **55.** a) $x_1=\sqrt{5}$, $y_1=3$; $x_2=-\sqrt{5}$, $y_2=3$; $x_3=$ $=\sqrt{3}i$, $y_2=-5$; $x_4=-\sqrt{3}i$, $y_4=-5$; b) $x_1=\sqrt{2}i$, $y_1=\sqrt{2}i$; $x_2=\sqrt{2}i$, $y_2=-\sqrt{2}i$, $x_3=-\sqrt{2}i$, $y_3=\sqrt{2}i$; $x_4=-\sqrt{2}i$, $y_4=$ $=-\sqrt{2}i$; c) $x_1=2$, $y_1=\sqrt{3}i$; $x_2=2$, $y_2=-\sqrt{3}i$; $x_3=-2$, $y_3=$ $=\sqrt{3}i$; $x_4=-2$, $y_4=-\sqrt{3}i$. **56.** a) $x=1+i$, $y=i$, b) $x=-\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{4}i$, $y=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i$; c) $x=-\frac{11}{2}+\frac{7}{2}i$, $y=\frac{51}{6}+\frac{1}{3}i$.

FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI FUNCȚIA LOGARITMICĂ

1. a) Se arată, mai intîi, că $1 + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Dacă $a > 1$, atunci $a^{1+\sqrt{6}} > a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $0 < a < 1$, atunci $a^{1+\sqrt{6}} < a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; dacă $a = 1$, cele două numere sînt egale; b) se arată, mai intîi că $\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2$. Dacă $a > 1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}} < a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $0 < a < 1$, atunci $a^{\sqrt{2}-\sqrt{5}} > a^{\sqrt{3}-2}$; dacă $a = 1$, cele două numere sînt egale. **2.** a) $x \in (-\infty, -2]$; b) $x \in [-2, +\infty)$; c) $x \in \mathbf{R}$; d) Dacă $a > 1$, atunci $x \in [0, +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (-\infty, 0]$; dacă $a = 1$, atunci $x \in \mathbf{R}$. **3.** a) $\operatorname{Im} f_1 = [1, 3]$; b) $\operatorname{Im} f_2 = (0, 1]$; c) $\operatorname{Im} f_3 = [0, +\infty)$; d) $\operatorname{Im} f_4 = (0, 1]$; e) Notăm $2^x = t$ și se utilizează variația funcției de gradul al doilea $f(t) = t^2 - 8t + 18$. Obținem $\operatorname{Im} f_5 = [1, +\infty)$. **4.** a) Se consideră separat cazurile: $x - 3 \geqslant 0$ și $x - 3 < 0$. Obținem $x \in (1, 5)$; b) Se consideră separat cazurile: $x - 4 \geqslant 0$ și $x - 4 < 0$. Se obține $x \in \mathbf{R}$; c) $x \in \left(1, \frac{5}{3}\right) \cup (2, +\infty)$; d) Se consideră separat cazurile: $|x| < 1$ și $|x| > 1$. Se obține $x \in (1, 2)$. **6.** a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; b) $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$; c) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$; e) Dacă $a > 1$, atunci $x \in (1, +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (0, 1)$; f) Dacă $b > 1$, atunci $x \in (1, +\infty)$; dacă $0 < b < 1$, atunci $x \in (0, 1)$. **7.** Dacă $0 < a < b < 1$ sau $1 < b < a$, atunci $\log_a b < \log_b a$; dacă $1 < a < b$ sau $0 < b < a < 1$, atunci $\log_a b > \log_b a$; dacă $a = b$, atunci cele două numere sînt egale. **8.** Dacă $a > 1$, atunci $x \in [1, +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (0, 1]$; b) Dacă $a > 1$, atunci $x \in (0, \sqrt[3]{a}]$; dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in [\sqrt[3]{a}, +\infty)$. **10.** a) $x = \sqrt[3]{\frac{m^2(m+n)\sqrt{m+n}}{(m-n)^4 n\sqrt{n}}}$; b) $x = \sqrt[4]{\frac{v\sqrt[3]{(u+v)^2}}{u^2\sqrt{u-v}}}$. **12.** $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$. **13.** $\log_{30} 16 = 4(1 - a - b)$. **14.** Se poate folosi inegalitatea mediilor: $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. **17.** $x/y \in \{1, 4\}$. **18.** $\log_5 4 + \log_{12} 2 = \frac{(1-m-n)(2+m-2n)}{2m(1-n)}$. **19.** Să demonstrăm, de exemplu, că $\log_2 3 \notin \mathbf{Q}$. Presupunem, prin absurd, că $\log_2 3 = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, de unde $2^m = 3^n$. Cum $\log_2 3 > 0$, putem presupune $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Din egalitatea $2^m = 3^n$, $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ este imposibilă, deoarece membrul stîng este un număr par, iar membrul drept este un număr impar. Prin raționamente analoage se demonstrează că numerele $\log_5 10$ și $\log_{1/2} 5 = -\log_2 5$ sînt iraționale. **20.** $b = a^q$, unde $q \in \mathbf{Q}$. **22.** Notăm $\log_2 x = t$ și obținem $f(t) = (t^2 - 6t)^2$. Valoarea maximă a lui f se obține pentru $t = 3$, deci pentru $\log_2 x = 3$, adică pentru $x = 8$. **23.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică (a se vedea ex. 26, cap. IV). **24.** Se poate aplica inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică (a se vedea ex. 26, cap. IV.)

25. Avem că $\log_2 3 > \log_3 4 \Leftrightarrow 3 > 2^{\sqrt{2}}$. Dar inegalitatea $3 > 2^{\sqrt{2}}$ este adevărată, deoarece $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} = 2^{3/2} < 3$. Deci $\log_2 3 > \log_3 4$. **26.** Avem $a = (bc)^x$, $b = (ca)^y$, $c = (ab)^z$ de unde $a^{x+1} = (abc)^x$, $b^{y+1} = (abc)^y$, $c^{z+1} = (abc)^z$. **27.** Avem inegalitățile: $\log_{xy}(yz) + \log_{yz}(xy) \geqslant 2$, $\log_{yx}(zx) + \log_{zx}(yx) \geqslant 2$, $\log_{xy}(zx) + \log_{zx}(xy) \geqslant 2$, care se adună membru cu membru. **28.** Aplicînd inegalitatea mediilor, avem: $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 \geqslant 4\sqrt[4]{\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6} = 4\sqrt[4]{\log_2 6} = 4\sqrt[4]{1 + \log_2 3} > 4\sqrt[4]{1 + \frac{3}{2}} > 5$. **29.** a) $x = 1$; b) Dacă $a \neq 1$, atunci $x \in \{-2, 1, 3\}$; dacă $a = 1$, atunci $x \in \mathbf{R}$; c) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$; d) $x_1 = -5$, $x_2 = 93/11$; e) $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$; f) $x = e$; g) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; h) n-are soluții. **30.** a) $x = 3$; b) n-are soluții; c) $x = 3$; d) $x = 1$. **31.** a) $x = 2$; b) $x = 1/2$; c) $x = 2$; d) $x = 6$; e) $x = 5$; f) $x = 1$. **32.** a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$; d) $x = \lg\frac{217}{285}/2\lg\frac{7}{5}$. **33.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; b) $x = 4$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = \lg 8/\lg 6$; e) $x = 1$. **34.** a) $x = 0$; b) $x = 7$; c) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **35.** a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; b) $x = 2$; $x = \frac{5}{2}$; d) $x_{1,2} = \frac{2\lg(5 \pm \sqrt{24})}{\lg 3}$. **36.** a) Se observă că $(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 1$. Notăm $(4 + \sqrt{15})^x = y$ și se obține ecuația $y + \frac{1}{y} = 62$. Se obține $y_{1,2} = 31 \pm 8\sqrt{15}$, de unde rezultă $x_1 = 2$ și $x_2 = -2$; b) Se procedează ca la pct. a) și se obține $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; c) Se procedează ca la pct. a) și b). Se obține $x = 3$. **37.** a) Împărțind ambii membri ai ecuației cu 6^x, se obține: $\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{13}{6} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$. Notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, de unde rezultă ecuația în y, $6y^2 - 13y + 6 = 0$. Soluțiile ecuației sînt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; c) $x = 0$; d) $x = 1$; e) Ecuația dată devine $3 \cdot 3^{2x^2+6x-10} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 15 \cdot 5^{2x^2+6x-10}$, care este evident de tipul celor de la punctele precedente. Se obține $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. **38.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) Din condițiile de existență a radicalilor rezultă că $x \in \{3\} \cup [5, +\infty)$. Se observă că $x = 3$ verifică ecuația, iar pentru $x \geqslant 5$, avem $5^{\sqrt{x-3}} + 7^{\sqrt{x^2-8x+15}} > 2$. Deci singura soluție a ecuației este $x = 3$. **39.** Dacă $a < 0$, ecuația nu are soluții; dacă $a > 0$ ecuația are soluția $x = \log_{2/3}(3a)$. Ecuația are soluție întreagă $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a = 2^n/3^{n+1}$. **40.** Ecuația are soluțiile $x = 2$, $y = \pm 5$. **41.** a) Ecuația se scrie $(x^x - x)(x^x - x^2) = 0$ care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$; b) Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației. Împărțind ambii membri ai ecuației cu 5^x, se obține ecuația echivalentă $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Dar, pentru $x < 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, iar pentru $x > 2$, avem $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Deci $x = 2$ este unica soluție a ecuației; c) $x = -1$, $x \in [0, 1]$; d) Din condițiile de existență a radicalilor, avem $x \geqslant 3$.

Se observă că $x = 3$ este o soluție a ecuației. Mai mult, din monotonia funcțiilor $f_1, f_2 : [3, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $f_2(x) = 2^{\sqrt{x-3}}$, rezultă că aceasta este unica soluție a ecuației; d) Din condițiile de existență a radicalilor, rezultă $x \geq 4$. Cum $1 \leq 2 + a \leq 3$ și $1 \leq 2 - a \leq 3$, rezultă că $1 \leq (2+a)^{\sqrt{x-4}}$ și $1 \leq (2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}}$ deci $2 \leq (2+a)^{\sqrt{x-4}} + (2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}}$, de unde în mod necesar $(2+a)^{\sqrt{x-4}} = (2-a)^{\sqrt{x^2-7x+12}} = 1$, de unde rezultă $x = 4$. **42.** a) Se consideră separat cazurile: $|x| \leq 1$ și $|x| > 1$. Se obține $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$; b) $x \in (-\infty, 1]$. **44.** a) $x = 2$; b) $x = \sqrt{2}$; c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; d) n-are soluții; e) $x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$; f) $x \in (0, 2] \setminus \{1\}$, $x = \frac{5}{2}$. **45.** a) $x = a^a$; b) $x = a^{3a^2}$; c) $x = c^b$; d) $x_1 = 6$, $x_2 = 14$; e) $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$; f) $x = c$. **46.** a) n-are soluții; b) n-are soluții; c) $x = 6^{3/4}$; d) Ecuația are soluții pentru $a > 0$, $x = a\sqrt[3]{4a}$; e) $x = 0{,}99$; f) $x = 1$. **47.** a) $x = 5$; b) $-\frac{\lg 5}{\lg 2}$; c) $x = 5$; d) $x = \lg 2$; e) $x = 2$; f) $x = 2$; g) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **48.** a) $x_1 = 10$, $x_2 = 10^3$; b) $x \in \{10^{-2\sqrt{2}}, 10^{-2}, 10^2, 10^{2\sqrt{2}}\}$; c) $x \in \{10^{-2}, 10^{-1}, 10, 10^2\}$; d) $x_1 = -\frac{9}{10}$, $x_2 = 9$; e) $x_1 = 2^{-8}$, $x_2 = 2^{27}$; f) $x_1 = 2^{-4/27}$, $x_2 = 2^{1/3}$. **49.** $x_1 = 1$, $x_2 = a^{(m:n)\frac{1}{m-n}}$. **50.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = 3^{-5}$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$; d) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; e) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 5^3$; f) $x \in \{2^{-\sqrt{2}}, 2^{-1}, 2, 2^{\sqrt{2}}\}$; g) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 9$; h) $x_1 = 3$, $x_2 = 3^6$. **51.** a) Utilizînd formula de schimbare a bazei, ecuația devine $\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1$, de unde se obține $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$; b) $x = 10^{\lg 3 \lg 5}$; c) $x = a^{2/5}$; d) $x_1 = 4$, $x_2 = 2 + 2^{-\frac{5}{4}}$; e) $x = \frac{1}{32}$; f) $x = 2$. **52.** $x_1 = 1$, $x_2 = ac$. **53.** a) Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației. Mai mult, din monotonia funcțiilor $f_1, f_2 : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x + 2^x + \log_2 x$, $f_2(x) = 7$, rezultă că aceasta este unica soluție a ecuației; b) Se observă că $x = 2$ este o soluție a ecuației și că aceasta este unică. **54.** $x_1 = a^{a^{\frac{1}{2}}}$, $x_2 = a^{a^2}$; b) $x = \frac{1}{a^2}$; c) $x_1 = a$, $x_2 = a^{9/16}$. **55.** a) $x = 3$, $y = 2$; b) $x = 0$, $y = 0$; c) $x_1 = 3$, $y_1 = 3$ și $x_2 = 1$, $y_2 = 2$; d) $x = 1$, $y = 3$, e) $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 2$ și $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y_2 = -3$; f) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei ecuații a sistemului; g) Trebuie ca $x > 0$, $y > 0$. Dacă $a < 1$, $b > 1$, sau $a > 1$, $b < 1$, ecuația a doua a sistemului nu poate fi satisfăcută pentru nici o valoare pozitivă a lui x și y, deci în acest caz sistemul nu are soluții.

Să presupunem că $a > 1$, $b > 1$ (sau $a < 1$, $b < 1$). Logaritmăm ambii termeni ai fiecărei ecuații a sistemului și obținem că, pentru $a \neq b$, $x = \left(\frac{\lg a}{\lg b}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b - \lg a}}$ și $y = \left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b - \lg a}}$, iar pentru $a = b$, sistemul are o infinitate de soluții $y = x = \alpha$, cu α real pozitiv. h) Dacă $b = 0$ sau măcar $c < 0$, sistemul nu are soluții. Fie $b > 0$, $c > 0$ și notăm $a^x = u$, $a^y = v$. Obținem sistemul $u^2 + v^2 = b$, $uv = c$, unde $u > 0$, $v > 0$. Deci u și v sînt soluțiile ecuației de gradul al doilea $z^2 - \sqrt{b + 2c}z + c = 0$. În final, se obține că dacă $b - 2c < 0$, sistemul nu are soluții, iar dacă $b - 2c \geqslant 0$, atunci

$$x_1 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} + \sqrt{b - 2c}}{2}, \quad y_1 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} - \sqrt{b - 2c}}{2},$$

$$x_2 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} - \sqrt{b - 2c}}{2}, \quad y_2 = \log_a \frac{\sqrt{b + 2c} + \sqrt{b - 2c}}{2};$$

i) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ și $x_2 = 1/2$, $y_2 = 3$; j) $x_1 = 8$, $y_1 = 18$ și $x_2 = 8 \log_3^3 2$, $y_2 = 16 \log_2^4 3 + 2$; k) $x_1 = 1$, $y_1 = 4$ și $x_2 = 4$, $y_2 = 7$; l) Trebuie ca $x > 0$, $y > 0$. Avem $x_1 = y_1 = 1$ și $x_2 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}$, $y_2 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}$; m) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$. **56.** a) Avem $\log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 \frac{1}{\sqrt{y}} = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 8\sqrt{y}$. Atunci sistemul devine: $x = 8\sqrt{y}$, $x^2 + 16\,y^2 = 17$. Se obține $x = 2$, $y = \frac{1}{16}$; b) $x = 10\sqrt[5]{\frac{7^2}{10^4}}$, $y = \sqrt[5]{\frac{7}{10^2}}$; c) $x = y = 3$; d) n-are soluții; e) $x_1 = y_1 = 2$ și $x_2 = 8$, $y_2 = \frac{1}{8}$; f) $x = 2$, $y = 6$; g) Trebuie ca $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Logaritmăm în baza c prima ecuație, iar a doua o scriem sub forma $\log_c \frac{x}{y} = \frac{\log_c x}{\log_c y}$. Dacă $a \neq b$ $(a, b > 0)$, atunci $x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}$, $y = c^{\frac{b}{b-a}}$. Dacă $a = b$, sistemul nu are soluții; h) Logaritmăm ambii membri ai fiecărei ecuații; i) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{5}$; j) Ecuația a doua devine $x^x = y^{x+2y}$. Se deduce $x = 4$, $y = 2$; k) Trebuie ca $m, n > 0$, $m, n \neq 1$. Dacă $m \neq n$, atunci rezultă $\log_m x = \frac{a - b\log_n m}{1 - (\log_n m)^2}$, $\log_m y =$ $= \frac{b - a\log_n m}{1 - (\log_n m)^2}$. Dacă $m = n$ și $a \neq b$, ecuația nu are soluție. Dacă $m = n$, $a = b$, sistemul se reduce la ecuația $\log_m(xy) = a$; l) Notăm $\log_x y = u$, $\log_x 3 = v$ și se obține ecuația în u: $7\,u^3 - 67\,u^2 + 118\,u - 24 = 0$ care are o rădăcină $u = 2$; m) Prima ecuație a sistemului este $\log_a(x^{\log_a x} y^{\log_a y}) = 2m$, adică $x^{\log_a x} y^{\log_a y} = a^{2m}$. Se notează $u = x^{\log_a x}$, $v = y^{\log_a y}$ și sistemul

devine $uv = a^{2m}$, $u + v = 2\,\dfrac{p^2+q^2}{p^2-q^2}\,a^m$, n) Adunăm ecuațiile și obținem $(xy)^{\lg z} + (xz)^{\lg y} + (yz)^{\lg x} = \dfrac{a+b+c}{2}$. Scădem din aceasta fiecare din ecuațiile sistemului dat și obținem sistemul $(yz)^{\lg x} = \dfrac{-a+b+c}{2}$, $(xz)^{\lg y} = \dfrac{a-b+c}{2}$, $(zy)^{\lg x} = \dfrac{a+b-c}{2}$. Logaritmăm fiecare ecuație a sistemului și notînd $u = \lg x$, $v = \lg y$, $w = \lg z$, obținem un sistem în u, v, w care se rezolvă ușor. **57.** a) $x \in (-1-\sqrt{2}, -2) \cup (0, -1+\sqrt{2})$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in \left(-\infty, -\dfrac{5}{6}\right) \cup (0, +\infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left(-\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$; c) $x \in (0, 1)$; d) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x > 3$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left(\dfrac{5+\sqrt{61}}{6}, 3\right)$; e) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (\log_2 3, +\infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in (-\infty, \log_2 3)$; f) $x \in \left(-\infty, \dfrac{\log_3 4}{2}\right)$; g) $x \in [\sqrt{6}-1, 5] \setminus \{2\}$; h) $x \in \left(\dfrac{31}{100}, 5+2\sqrt{6}\right)$; i) $x \in \left(0, \dfrac{4}{5}\right) \cup \{2\}$; j) $x \in (1, \log_3 28 - 3) \cup (1 + \log_3 4, +\infty)$; k) $x \in \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{6-\sqrt{6}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{6+\sqrt{6}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$; l) $x \in (3, 5)$; m) $x \in (0, \sqrt{2}-1) \cup$ $\cup (1, +\infty)$; n) $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$. **58.** a) $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup$ $\cup (1, +\infty)$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (0, 1] \cup \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a^2}\right]$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left[\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{a}\right) \cup [1, +\infty)$. **59.** Se consideră separat cazurile: $\dfrac{a-1}{a+1} > 1$ și $0 < \dfrac{a-1}{a+1} < 1$. În primul caz inegalitatea devine $x^2 \geqslant \dfrac{-2(a+2)}{a+1}$ și pentru ca să fie satisfăcută pentru orice x real, trebuie ca $\dfrac{-2(a+2)}{a+1} \leqslant 0$; se obține $a \in (-\infty, -2]$. În al doilea caz inegalitatea devine $x^2 + 3 \leqslant \dfrac{a-1}{a+1}$ și nu există nici o valoare a lui a pentru ca ea să fie satisfăcută pentru orice x real. Deci $a \in (-\infty, -2]$. **60.** $a \in \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$. **61.** Punem $z = 2^x > 0$ și problema revine la a determina toate valorile lui m, astfel încît $mz^2 +$ $+ 4(m-1)z + m - 1 > 0$, oricare ar fi $z > 0$. Se găsește $m \in [1, +\infty)$. **62.** $m \in [0, +\infty)$. **63.** Dacă notăm $e^a = u$, $e^b = v$, $e^c = w$, avem că u, v, w sînt distincte. Din condițiile problemei, dînd lui x valorile: 0, 1, 2, rezultă că $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0$. Rezolvînd sistemul de ecuații în α, β, γ, găsim $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

INDUCŢIA MATEMATICĂ

1. Se demonstrează uşor prin inducţie matematică. Este util de încercat să se determine formulele care dau sumele din membrul stîng. **2.** a) Observăm că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Se demonstrează, apoi, prin inducţie matematică că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, pentru orice $n \geqslant 1$; b) Observăm că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$. Folosind problema 1, se găseşte că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Se demonstrează apoi prin inducţie matematică că formula găsită este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$. **3.** Se demonstrează prin inducţie matematică. **4.** a) Folosind formula $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$, se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$; b) Folosind formula $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$, se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$. **5.** a) Folosind formula $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$, se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$; b) Folosind formula $\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right]$, se găseşte $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$; c) Folosind formula $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$, se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3n+1}$; d) Se obţine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4n+1}$; e) Se obţine $\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i+n-1)(i+n)} = \frac{n}{k(n+k)}$. **7.** a) Avem $\sum_{k=1}^{n} k!\,k = \sum_{k=1}^{n} k!\,(k+1-1) = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!]$. Se obţine $\sum_{k=1}^{n} k!\,k =$

$= (n+1)! - 1$; b) $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)!(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k!\,k =$ $= (n+2)! - (n+1)! = (n+1)!(n+1)$; c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} =$ $= 1 - \frac{1}{(n+2)!}$; e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1}\right) =$ $= \frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}$; f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$ $= \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$. **11.** Condiţia de existenţă a logaritmului ne dă $x > -4$. Inegalitatea este echivalentă cu $2^{3x+1} < (x+4)^2$, care este evident satisfăcută pentru x egal cu: $-3, -2, -1, 0, 1$. Se demonstrează prin inducţie matematică că pentru oricare $x \geqslant 2$, întreg, avem $2^{3x+1} > (x+4)^2$. Deci $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x + 1 < 2\log_2(x+4)\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. **12.** Pentru $n = 0, 1$, inegalitatea este îndeplinită; pentru $n = 2, 3, 4$, inegalitatea nu este îndeplinită. Pentru $n = 5, 6$ este îndeplinită. Se demonstrează prin inducţie matematică că inegalitatea este îndeplinită pentru orice $n \geqslant 5$. Deci $\{n \in \mathbf{N} \mid 2^n > n^2\} = \{0, 1\} \cup \{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant 5\}$. **16.** Pentru $n = 1$, avem $a + b \geqslant a + b$, adevărată. Să presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n = k$ şi să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Într-adevăr, $2^{k-1}(a^k + b^k) \geqslant (a + b)^k$ ne dă $2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b) \geqslant (a + b)^{k+1}$. Dar $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} \geqslant a^k b + ab^k \Leftrightarrow (a^k - b^k)(a - b) \geqslant 0$. Ultima inegalitate fiind evident adevărată rezultă că $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)$, deci $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant (a + b)^{k+1}$. Demonstraţia este terminată pe baza inducţiei matematice. **17.** a) Demonstraţia se face prin inducţie matematică după k; b) Dacă $k \leqslant n$, atunci $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$ $= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2+2k+1}{n^2} - \frac{k+1}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} -$ $- \frac{n(k+1) - k^2}{n^3} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}$, deoarece $n(k + 1) > k^2$ pentru $n \geqslant k$. Punem mai înainte $k = n$ şi obţinem $2 = 1 + \frac{n}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 +$ $+ \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3$. **18.** Pentru $n = 6$ se verifică că inegalităţile sînt îndeplinite. Să considerăm că $\left(\frac{k}{2}\right)^k > k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$ şi să demonstrăm că $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} >$ $> (k+1)! > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$. Pentru a demonstra ultimele inegalităţi este suficient să verificăm că $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{2}\right)^k \geqslant k + 1 \geqslant \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{3}\right)^k$, care

se reduce la $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^n \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, care rezultă din problema precedentă. **19.** Pentru $n = 2$, se obține $\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$. Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n = k$. Se demonstrează mai întîi că inegalitatea este adevărată pentru $n = 2k$. Din cele de mai sus rezultă că inegalitatea este adevărată pentru un număr natural $n = 2^s$, $s \in \mathbf{N}$. Se arată, apoi, că dacă inegalitatea este adevărată pentru $n = k$, atunci este adevărată pentru $n = k - 1$. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ numere pozitive și λ un număr pozitiv, deocamdată nedefinit. Atunci $\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_{k-1}\lambda} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k}$. Alegem λ, încît $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\lambda}{k} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$, deci $\lambda = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Avem

$$\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})}{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1} \text{ sau}$$

$\sqrt[k-1]{a_1a_2\ldots a_{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Fie acum un număr oarecare m, natural. Dacă $m=2^s$, $s \in \mathbf{N}$, rezultă de mai înainte că inegalitatea este adevărată pentru m. Dacă $m \neq 2^t$, oricare ar fi $t \in \mathbf{N}$, atunci fie s, astfel încît $m < 2^s$. Pe baza celor de mai înainte, inegalitatea este adevărată pentru $n = m$. **20.** Demonstrația rezultă ușor prin inducție matematică. **21.** Suma $1^3 + 2^3 + 3^3$ se divide cu 9. Să presupunem că suma $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ se divide cu 9. Atunci suma $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2+3k+3)$ se divide evident cu 9, ca fiind suma a doi termeni fiecare dintre aceștia fiind divizibil cu 9. **22.** $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ este divizibil cu 2 și cu 3, deci cu 6. Să demonstrăm că $n^5 - n$ se divide cu 5. Fie $d_n = n^5 - n$ și să considerăm propoziția „d_n se divide cu 5". Evident $d_0 = 0$ se divide cu 5. Să presupunem că d_k se divide cu 5 și să demonstrăm că d_{k+1} se divide cu 5. Într-adevăr, $d_{k+1} = (k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = d_k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$. Se observă că d_{k+1} se divide cu 5. **23.** a) Fie propoziția $P(n)$: „$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide cu 133". Evident, $P(0)$ este adevărată, deoarece $11^2 + 12 = 133$. Să presupunem că $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ se divide cu 133, adică $P(k)$ este adevărată și să demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată. Într-adevăr, avem $11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 12^2 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) - (12^2 - 11) \cdot 11^{k+2}$. Observăm că acesta se divide cu 133, ca fiind diferența a două numere, fiecare dintre ele fiind divizibil cu 133; b), c), d) se demonstrează analog. **26.** b) Dacă $2k^3 > 3k^2 + 3k + 1$, atunci $2(k+1)^3 > (k+1)^2 + 3(k+1) + 1$, deoarece această inegalitate se obține din prima prin adunarea membru cu membru a ei și a inegalității evidente $6k^2 + 6k + 2 > 6k + 6$. **27.** Din $3^k > k^3$, rezultă $3^{k+1} > 3k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$. De aici, rezultă $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, $n \geqslant 4$. **28.** Pentru $n = 0$, inegalitatea este îndeplinită. Fie $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$. Atunci $|\sin(n+1)x| = |\sin nx \cos x + \sin x \cos nx| \leqslant |\sin nx||\cos x| + |\sin x||\cos nx| \leqslant n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|$. Deci $|\sin(n+1)x| \leqslant (n+1)|\sin x|$. Demonstrația este terminată pe baza inducției

matematice. **29.** Trebuie să demonstrăm că orice număr natural mai mare decît 8, se poate descompune în suma a două numere, dintre care un multiplu de 3 şi un multiplu de 5. Demonstrăm prin inducţie matematică. Pentru $k = 8$ afirmaţia este adevărată, deoarece $8 = 3 + 5$. Fie că afirmaţia este adevărată pentru un număr n, adică $n = 3s + 5t$, $s, t \in \mathbf{N}$. Sint posibile două cazuri 1) $t = 0$; 2) $t \geqslant 1$. În primul caz, cînd $t = 0$, trebuie ca $s \geqslant 3$. Atunci $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s - 3) + 5(t + 2)$. În cazul al doilea $n + 1 = 3s + 5t + 1 = 3(s + 2) + 5(t - 1)$. Deci afirmaţia este adevărată pentru $n + 1$. **31.** Pentru $n = 1$ afirmaţia este evident adevărată. Fie adevărată afirmaţia pentru k şi să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Alegem unul din plane, să zicem al $(k + 1)$-lea. Atunci conform problemei precedente planul ales este împărţit de dreptele de intersecţie ale celorlalte k plane cu acesta, în $2k$ părţi. Conform ipotezei inductive cele k plane rămase împart spaţiul în $k(k - 1) + 2$ părţi. Fiecare parte a planului ales (al $k + 1$-lea) împarte una din părţile spaţiului date de cele k plane în două părţi. Deci se obţin $k(k - 1) + 2 + 2k = (k + 1)k + 2$ părţi. **32.** Demonstrăm prin inducţie matematică după n. Pentru $n = 1$, afirmaţia este adevărată, deoarece $1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$, iar o dreaptă împarte planul în două părţi. Fie adevărată afirmaţia pentru $n = k$ şi să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem una din cele $k + 1$ drepte pe care o vom numi a $(k + 1) - a$. Din ipoteza inductivă cele k drepte rămase împart planul în $1 + \frac{k(k + 1)}{2}$ părţi, a $(k + 1)$-a dreaptă taie primele k în k puncte şi de aceea este împărţită de aceste puncte în $k + 1$ părţi. Deoarece cele k puncte obţinute sînt diferite de punctele de intersecţie ale primelor k drepte (între ele), atunci fiecare din aceste părţi împart una din părţile planului în două părţi (date de cele k drepte), adică la $1 + \frac{k(k + 1)}{2}$ părţi se adaugă încă $k + 1$. Deci avem $1 + \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = 1 + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$ părţi. **33.** Se demonstrează prin inducţie matematică după n, folosind problema precedentă (la trecerea de la pasul k la pasul $k + 1$), analog raţionamentului din problema 32. **34.** Vom demonstra prin inducţie matematică după n. Pentru $n = 1$, afirmaţia este evident adevărată. Fie adevărată afirmaţia pentru $n = k$ şi să o demonstrăm pentru $n = k + 1$. Alegem unul din cercuri şi atunci, mai întîi, el se intersectează cu fiecare din celelalte k cercuri în cel mult 2 puncte, şi în al doilea rînd cele k cercuri rămase împart planul în cel mult $k^2 - k + 2$ părţi (conform ipotezei de inducţie). Punctele obţinute (în număr de cel mult $2k$) de intersecţie ale cercului ales cu celelalte cercuri îl împart în cel mult $2k$ părţi şi fiecare dintre aceste arce împart una din părţile avute ale planului în două. Deci se obţin cel mult $(k^2 - k + 2) + 2k = (k + 1)^2 - (k + 1) + 2$ părţi. Dacă cercurile sînt două cîte două secante, atunci avem egalitate. **35.** Pentru $n = 1$ afirmaţia nu necesită demonstraţie. Să demonstrăm că şi pentru $n = 2$ este de asemenea valabilă. Să notăm laturile pătratelor date $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ cu a şi b (fig. 21). Să presupunem $a \geqslant b$ şi fie M, N, P, Q pe laturile pătratului $ABCD$ astfel încît $AM = BN = CP = DQ = \frac{a + b}{2}$ şi tăiem pătratul după dreptele MP

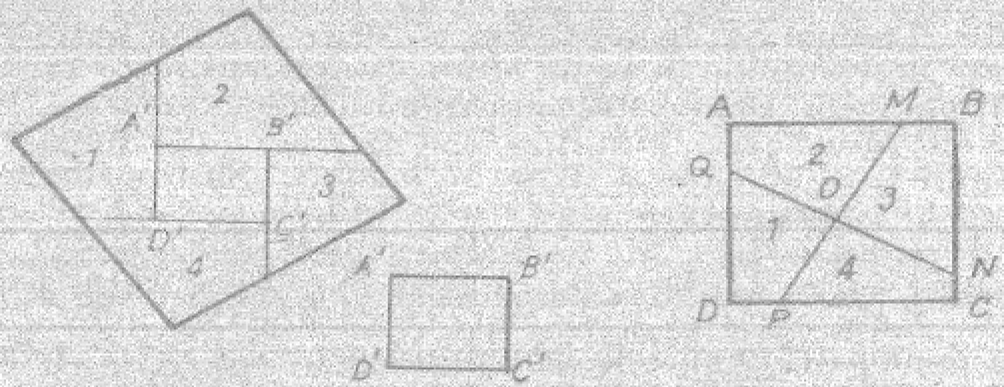


Fig. 21

și NQ, obținînd patru părți egale. Aceste părți se pot aplica pe laturile celui de al doilea pătrat ca în figură, obținîndu-se un nou pătrat. Să presupunem afirmația adevărată pentru n pătrate și să considerăm acum $n + 1$ pătrate. Alegem două oarecare P_1 și P_2 și procedind ca la pasul $n = 2$ obținem din acestea un nou pătrat P'. Astfel am redus numărul pătratelor la n și aplicăm ipoteza de inducție pentru pasul n. **36.** Vom face inducție după numărul l al frontierelor hărții. Fie $l = 0$, atunci $s = 1$, $p = 1$ și clar $s + p = l + 2$. Să presupunem că teorema este adevărată pentru orice hartă care are n frontiere și să considerăm o hartă ce conține $l + 1$ frontiere, s țări și p vîrfuri. Sînt posibile două cazuri: 1) Pentru orice pereche de vîrfuri ale hărții există un drum unic care le unește de-a lungul frontierelor hărții. În acest caz harta nu are nici un contur închis. Avem $s = 1$. Se arată că pe o astfel de hartă se va găsi cel puțin un vîrf aparținînd numai unei singure frontiere. Îndepărtind acest vîrf cu unica frontieră care îl are drept capăt, obținem o nouă hartă în care $l' = l - 1 = n$, $s' = s - 1$, $p' = p - 1$. În virtutea ipotezei inductive $s' + p' = l' + 2 \Rightarrow s + p = l + 2$. 2) Există două vîrfuri unite prin mai multe drumuri. În acest caz pe hartă există un contur închis care trece prin aceste vîrfuri. Îndepărtind una dintre frontierele acestui contur (fără vîrfuri), obținem o nouă hartă în care $l' = l - 1 = n$, $p' = p$, $s' = s - 1$. Prin ipoteza inductivă $s' + p' = l' + 2 \Rightarrow s + p = l + 2$. **37.** Să așezăm poliedrul în interiorul unei sfere de rază suficient de mare și să proiectăm din centrul sferei, care-l putem considera în interiorul poliedrului toate punctele poliedrului pe sferă. Harta obținută pe sferă o proiectăm dintr-un punct arbitrar al ei, care nu aparține nici unei frontiere, pe planul tangent sferei în punctul diametral opus. Hărții plane obținute îi aplicăm teorema lui Euler (problema precedentă). **38.** Pentru $n = 1$, afirmația este evident adevărată. Fie adevărată afirmația pentru k și să demonstrăm că este adevărată pentru $k + 1$. Fie pentru aceasta $k + 1$ sfere. Deoarece k sfere interesectează sfera $(k + 1)$—a după k cercuri și prin urmare împart suprafața ei în $k^2 - k + 2$ părți (vezi problema 37) rezultă că dacă k sfere, două cite două secante, împart spațiul în N_k părți, atunci $k + 1$ sfere împart spațiul în $N_{k+1} = N_k + (k^2 - k + 2)$ părți. De aici rezultă $N_{k+1} = \frac{k(k^2 - 3k + 8)}{3} + (k^2 - k + 3) = \frac{(k + 1)((k + 1)^2 - 3(k + 1) + 8)}{3}$. Conform inducției matematice afirmația este adevărată pentru orice $n \geq 1$, număr natural.

Capitolul X

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON

1. a) $n = 5$; b) $n = 3$; c) $n = 6$. **2.** a) $n \geq 12$ $(n \in \mathbf{N})$; b) $3 \leq n \leq 11$ $(n \in \mathbf{N})$. **3.** a) $5 \leq n \leq 20$ $(n \in \mathbf{N})$; b) $n \in \{0,1,2,3\}$. **4.** $5! = 120$. **5.** a) $5! : 2 = 60$ moduri; b) $4! = 24$ moduri. **6.** a) $6! - 5! = 600$; b) $5! = 120$; c) $5! - 4! = 96$; d) $4! = 24$; e) $600 - 24 = 576$. **7.** $\frac{7!}{14} = 360$. **8.** Fie (i, j), $i = 1, 2, ..., 8$; $j = 1, 2, ..., 8$, careul care se găsește la intersecția liniei orizontale i cu linia verticală j (pe tabla de șah). Două turnuri care se găsesc în careurile (i, j) și (k, l) nu se pot lua unul pe celălalt, atunci și numai atunci cînd $i \neq k$ și $j \neq l$. Se găsesc $8! = 40320$ așezări posibile diferite ale celor 8 turnuri. **9.** Se găsește mai întîi că există $k!\,(n-k+1)!$ permutări, în care numerele $a_1, a_2, ..., a_k$ ocupă k locuri la rînd și deci numărul cerut în problemă este $n! - k!\,(n-k+1)!$. **10.** $\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]\right)! \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]\right)! \left(n - \left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]\right)\right)! \left[\frac{n}{6}\right]!$. **11.** a) $\frac{n^2 - 11n + 31}{n-5}$; b) 0; c) 1; d) $n + 3$; e) $\frac{n^2 - n - 2k - 2}{k+1}$; f) $4k^2$; g) $\frac{(n-1)!}{(k-1)!} = A_{n-1}^{n-k}$; h) $\frac{n!}{(k-1)!} = A_n^{n-k+1}$. **12.** a) $n = 7$; b) $n = 5$; c) $n = 8 - m$, $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; d) $n = 12$; e) $n = 9$. **13.** $A_5^3 = 60$ moduri. **14.** $A_6^2 = 30$ dicționare. **15.** $A_9^5 = 15120$; $4A_8^4 = 8400$. **16.** Numere cu cinci cifre sînt: $A_5^5 - A_4^4 = 96$. Numere cu patru cifre sînt: $A_5^4 - A_4^3 = 96$. Numere cu trei cifre sînt: $A_5^3 - A_4^2 = 48$, cu două cifre sînt: $A_5^2 - A_4^1 = 16$, iar cu o cifră sînt 5. În total sînt 261 numere. **17.** Numărul liniilor poligonale neînchise este egal cu $\frac{1}{2} A_n^{k+1}$, iar al celor poligonale închise este egal cu $\frac{A_n^k}{2n}$. **18.** a) 0; b) $\frac{2(n-k)}{n-1}$. **19.** $n = 9$; $C_9^7 = 36$. **20.** a) $n \in \{3, 14\}$; b) $n = 5$; c) $n = 19$; d) $n = 4$; e) $n = 7$; f) $n = 4$; g) $n = 7$; h) $n = 5$; i) $n = 27$. **21.** a) $n > 6$ $(n \in \mathbf{N})$; b) $1 \leq k \leq 9$ $(k \in \mathbf{N})$; c) $9 \leq k \leq 15$ $(k \in \mathbf{N})$; d) $4 \leq n \leq 13$ $(n \in \mathbf{N})$. **22.** $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. **23.** $9 \cdot 7 = 63$; $C_9^2 \cdot C_7^2 = 756$. **24.** $C_8^4 = 70$; $3 \cdot C_5^3 = 30$. **25.** $C_6^2 = 15$. **26.** $C_9^5 = 126$; $C_{10}^5 = 252$. **27.** $C_6^3 \cdot C_9^4 + C_6^4 \cdot C_9^3 + C_6^5 \cdot C_9^2 + C_6^6 \cdot C_9^1 = 4005$. **28.** $C_7^4 \cdot A_8^4 = 58\,800$. **29.** a) $x = 5k - 1$, $y = 3k$ $(k \in \mathbf{N}^*)$; b) $x = 3$, $y = 8$; c) $x = 5$, $y = 5$; d) $x = \frac{2(k+1)!\,(n-k)!}{n!}$, $y = \frac{k(k+1)(2k-n+1)}{n^2(n+1)}$.
30. a), b). Se folosește relația $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$; c) Se folosește formula $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. **31.** a) $\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$; b) Suma se scrie astfel $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2(k-1)^2}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} k^4 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k^3 + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} k^2$. Se folosește apoi problema 1 din capitolul IX. 31. a) $\frac{n(n^2-1)}{6}$; b) $\frac{n(n+1)(3n^3 - 3n^2 - 2n + 2)}{60}$.
32. Se demonstrează prin inducție după n. Notăm cu $S_n = 1 + N_1 + N_2 + ... + N_{n-1}$. Dacă considerăm numerele $1, 2, ..., n, n+1$, atunci se

observă că $S_{n+1} = 1 + [N_1 + (n+1)] + [N_2 + (n+1)N_1] + \dots + [N_{n-1} + (n+1)N_{n-2}] + (n+1)N_{n-1} + n!$. **33.** a) $1 + C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 2^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot 2^{n-1} + 2^n = (1+2)^n = 3^n$; b) Acelaşi rezultat ca la punctul a). **34.** Să notăm cu S suma cerută. Împărţind ambii membri cu $(2n)!$ se obţine $\frac{S}{(2n)!} = \frac{1}{C_{2n}^0} - \frac{1}{C_{2n}^1} + \frac{1}{C_{2n}^2} - \dots - \frac{1}{C_{2n}^{2n-1}} + \frac{1}{C_{2n}^{2n}}$. Se arată că $\frac{1}{C_{2n}^k} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{C_{2n+1}^k} + \frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right)$, relaţie pe care o folosim în egalitatea de mai înainte. **35.** Se scrie $S_k = \sum_{l=1}^{k} l!\,(1 + l^2) = \sum_{l=1}^{k} l!\,(1 + l^2 + 2l - 2l) = \sum_{l=1}^{k} [(l+1)!\,(l+1) - 2l\,l!]$.

37. a) $T_8 = 120\, x^3 a^7$; b) $T_5 = 126\, x^2 y^2 \sqrt{x}$; c) $T_8 = -3432 \frac{1}{x^4 \sqrt[3]{x^2}}$; d) $T_7 = 219648\, a^3 b \sqrt{ab}$, $T_8 = -109824\, a^3 b \sqrt[4]{b^3}$. **38.** a) $k = 2$; b) $k = 3$; c) $k = 16$; d) $k = 8$; e) $k = 8$. **39.** $k = 16$. **40.** $n = 15$. **41.** $n = 20$. **42.** $n = 6$. **43.** $n = 15$, $T_6 = 1001 \cdot 3^6$. **44.** $n = 8$, $T_5 = 70(1-x)^2$. **45.** $x_1 = \frac{1}{100\sqrt{10}}$, $x_2 = 10$.

46. $m = 12$. **47.** $n = 6$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **48.** $x_1 = \frac{1}{10^4}$, $x_2 = 10$. **49.** $n = 7$, $T_5 = 35\, x^{2/3}$. **50.** $T_5 = 126\, a^{-1}$. **51** a) $T_{15} = -C_{24}^{10} \cdot 36$; b) $T_1 = 3^5$; $T_3 = C_{10}^2 \cdot 3^4 \cdot 7$; $T_5 = C_{10}^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$; $T_7 = C_{10}^6 \cdot 3^2 \cdot 7^3$; $T_9 = C_{10}^8 \cdot 3 \cdot 7^4$; $T_{11} = 7^5$. **52.** Sînt 51 de termeni şi anume T_{4k+1}, $k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k \leqslant 50$. **53.** $T_i \notin \mathbf{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant 25$, $i \neq 1$ şi $i \neq 15$ $(i \in \mathbf{N})$. **54.** Din dezvoltare avem $nm - (m+p)k = 0$, $nm - 11(m+p) = 1$, $nm - 23(m+p) = 5$. Scăzînd prima ecuaţia din celelalte două şi făcînd cîtul se obţine $\frac{k-11}{k-23} = \frac{1}{5}$, de unde $k = 8$. Apoi, $m + p = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{8}{3m}$ şi deoarece n este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg şi pozitiv. Lăsăm continuarea pe seama cititorului. **55.** $n + 1$. **56.** Sînt 6 termeni raţionali. **57.** $-C_7^0 C_4^3 + C_7^1 C_4^2 - C_7^2 C_4^1 + C_7^3 C_4^0 = -11$. **58.** a) Punem $x^4 = y^3 = 1$. Atunci dezvoltînd după formula binomului lui Newton şi înlocuind x^4 şi y^3 prin 1, obţinem suma căutată a coeficienţilor. Astfel suma coeficienţilor este egală cu $(9-8)^{19} = 1$; b) Suma coeficienţilor dezvoltării $(8x^2 - 6y^3)^8$ este $(8-6)^8 = 256$. **59.** $(9-8)^n = 1$. **60.** a) Calculăm $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}$ şi obţinem că $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} > 1$, pentru $k \leqslant 32$ şi $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$, pentru $k \geqslant 33$. Deci cel mai mare este T_{34}; c) $k = 10$. **61.** Se studiază cazurile: n par şi n impar. **62.** Trebuie să găsim un l, astfel încît suma primilor l termeni ai dezvoltării $(1 + 10^{-2})^{10}$ să difere de numărul $(1 + 10^{-1})^{10}$ cu mai puţin de 10^{-3}. Pentru aceasta este suficient ca suma termenilor dezvoltării, începînd cu cel de rang $l + 1$, să fie mai mică decît 10^{-3}. Se rezolvă inegalitatea $\sum_{k \geqslant l} T_{k+1} < 10^{-3}$, adică $\sum_{k \geqslant l} C_{10}^k (10^{-2})^k < 10^{-3}$. Însă $\sum_{k \geqslant 3} C_{10}^k < 1000$, de unde $\sum_{k \geqslant l} C_{10}^k \cdot (10^{-2})^k < 10^3 \cdot 10^{-6} < 10^{-3}$, pentru $l \geqslant 2$. Se observă că numai doi termeni ai dezvoltării nu sînt de ajuns, aşadar trebuie să luăm neapărat primii trei termeni ai dezvoltării. **63.** Se consideră egalitatea $(1 - \sqrt{3}\,i)^{6n} = \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{6n} = 2^{6n}$. Dezvoltăm membrul stîng după formula bi-

nomului lui Newton și partea reală a dezvoltării care este tocmai $\sum_{k=0}^{3n} C_{6n}^{2k}(-3)^k$ este egală cu 2^{6n}. **64.** Se consideră egalitatea $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Se dezvoltă $(1+i)^n$ după formula binomului Newton și se egalează părțile reale și imaginare ale celor doi membri. **65.** Se consideră egalitatea $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \frac{\cos 2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$. **66.** Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$. **67.** Se consideră dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $(1+i)^n$. **68.** Avem $(1+x)^n + (1-x)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C^{2k} x^{2k}$. Coeficienții din dezvoltare sînt pozitivi. Cea mai mare valoare se poate obține pentru $x = 1$, cînd se obține 2^n. **69.** a) Fie $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$. Din $C_n^k = C_n^{n-k}$, se obține $S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1}$. Adunînd cele două egalități, avem $2\cdot S_n = n(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n) = 2^n\cdot n$, de unde $S_n = 2^{n-1}n$; b) Se procedează ca la pct a); obținem $S_n = (n+1)\cdot 2^{n+1}$; c) $S_n = (n-2)2^{n-1} + 1$; d) $S_n = (n+1)2^n$; e) $S_n = 0$; f) Avem $S_n = 4(C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n) = 2^{n-1}n - 2^n + 1$; g) Folosim formula $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ și obținem $S_n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 - 2(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + 3(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) - \ldots + (-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1} = C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}$. Dacă $n = 1$, $S_1 = 0$ și dacă $n > 1$, $S_n = 0$; h) Avem $S_n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; i) $C_n^k = \frac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}$, obținem $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C_{n+2}^2 + 2C_{n+2}^3 + \ldots + (n+1)C_{n+2}^{n+2}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C_{n+2}^1 + 2C_{n+2}^2 + \ldots + (n+2)C_{n+2}^{n+2}) - (C_{n+2}^1 + \ldots + C_{n+2}^{n+2})$. Conform pct. a) și pct. b) se obține: $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[2^{n+1}(n+2) - 2^{n+2} + 1] = \frac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}$; j) Suma devine $S_n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + \ldots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1})$. Dar suma dintre paranteze este egală cu 1 și deci $S_n = \frac{1}{n+1}$. **70.** a) Suma este egală cu coeficientul lui x^n din expresia $x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \ldots + x^{n-m}(1-x)^n$, care este egală cu $x^{n-m}(1-x)^{n-1} - x^{n+1}(1-x)^n$. Se obține că suma căutată este egală cu $(-1)^m C_{n-1}^m$, pentru $m \leqslant n-1$ și este egală cu 0, pentru $m = n$; b) Suma căutată este egală cu coeficientul lui x^k din expresia $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+m}$, care este egală cu $\frac{1}{x}[(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n]$. Rezultă că suma este egală cu $C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$, pentru $k \leqslant n-1$

și este egală cu C_{n+m+1}^{n+1}, pentru $k=n$; c) Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ rădăcinile ecuației $x^k - 1 = 0$, adică $\varepsilon_l = \cos \frac{2l\pi}{k} + i \sin \frac{2l\pi}{k}$, $l = 1, 2, \ldots, k$. Avem că $\varepsilon_1^s + \varepsilon_2^s + \ldots + \varepsilon_k^s$ este egală cu k, dacă $k|s$ și este 0, dacă $k \nmid s$. Deci $\sum_{l=1}^{k} (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s \left(\sum_{l=1}^{k} \varepsilon_l^s\right) = k \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]} C_n^{lk}$. Cum $1 + \varepsilon_l = 2 \cos \frac{l\pi}{k}\left(\cos \frac{l\pi}{k} + i \sin \frac{l\pi}{k}\right)$, atunci $\sum_{l=1}^{k} (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{l=1}^{k} 2^n \cos^n \frac{l\pi}{k}\left(\cos \frac{nl\pi}{k} + i \sin \frac{nl\pi}{k}\right)$.
Rezultă că suma căutată este egală cu $\frac{2^n}{k} \sum_{l=1}^{k} \cos^n \frac{l\pi}{k} \cos \frac{nl\pi}{k}$; d) Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ ca la punctul b) și considerăm suma $\sum_{l=1}^{k} \varepsilon_l^{-1} (1 + \varepsilon_l)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l(\varepsilon_1^{l-m} + \ldots + \varepsilon_k^{l-m})$. Se folosește faptul că $\varepsilon_1^{l-m} + \ldots + \varepsilon_k^{l-m}$ este egală cu k, dacă $k|l - m$ și este egală cu 0, dacă $k \nmid l - m$. Se obține că suma căutată este egală cu $\frac{2^n}{k} \sum_{l=1}^{k} \cos^n \frac{l\pi}{k} \cos \frac{(n-2m)l\pi}{k}$, pentru $k > 1$. **71.** a) Egalăm coeficienții lui x^n din cei doi membri ai egalității $(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$. Se obține că suma căutată este C_{2n}^n; b) Se calculează coeficientul lui x^n din ambele părți ale egalității $(1 - x)^n (1 + x)^n = (1 - x^2)^n$. Se obține că suma este 0, pentru n impar, iar pentru $n = 2k$, număr par, suma este $(-1)^k C_{2k}^k$; c) Se poate folosi formula $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Se obține că suma căutată este 1, pentru $n = 3k$; 0, pentru $n = 3k + 1$; -1, pentru $n = 3k - 1$, $k \in \mathbf{N}$; d) Suma căutată este egală cu 2^{2n}.

Capitolul XI

PROGRESII ARITMETICE ȘI PROGRESII GEOMETRICE

1. a) 3, 8, 13, 18, 23; b) -2, 1, 6, 13, 22; c) $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{-1}{120}$; d) $0, \frac{1}{2}, \frac{-8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{-24}{5}$; e) $\frac{2}{4}, \frac{4}{7}, \frac{6}{10}, \frac{8}{13}, \frac{10}{16}$; f) $1, \frac{4}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{5}, \frac{6}{10}$; g) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. **2.** a) $(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; b) $0, \frac{1}{100}, \frac{101}{10\,000} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000}$, deci $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{10^2}$, $a_3 = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4}$. În general $a_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots + \frac{1}{10^{2n}} = \sum_{k=1} \frac{1}{10^{2k}}$; c) $\frac{2n \cdot 2(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$; d) $\frac{2 \cdot 3^{n-1}}{5^n}$; e) $\frac{4n-1}{6n-1}$. **3.** a) Din $3n^2 - 2 = 190$, rezultă $3n^2 = 192$, de unde $n = 8$. Deci $a_8 = 190$; b) Obținem că $a_9 = 241$; c) nu este; d) Obținem că $a_{73} = 15985$.

4. $a_1 = \alpha$, $a_2 = 2\alpha$, $a_3 = 3\alpha$, $a_4 = 4\alpha$, $a_5 = 5\alpha$; b) $a_1 = \beta$, $a_2 = 2\beta$, $a_3 = 4\beta$, $a_4 = 8\beta$, $a_5 = 10\beta$; c) $a_1 = \gamma$, $a_2 = 1$, $a_3 = \gamma$, $a_4 = 1$, $a_5 = \gamma$; d) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = \alpha^2 - \beta^2$, $a_4 = \alpha\beta - \beta\alpha^2 + \beta^3$, $a_5 = \alpha^3 - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \beta^4$; e) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $a_3 = 2\alpha\beta$, $a_4 = \beta^2 + 2\alpha^2\beta$, $a_5 = 3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3\beta$. **5.** $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2^2 + 1$, $a_3 = 2^3 + 1$. Se demonstrează prin inducție matematică că $a_n = 2^n + 1$. **6.** $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$. În general, $a_n = n^2$. Demonstrația se face prin inducție matematică. **7.** $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = \frac{1}{4}$. În general, $b_n = \frac{1}{n}$. Demonstrația se face prin inducție matematică. **8.** Demonstrația se face prin inducție matematică. **9.** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{5}{6}$. În general, $x_n = \frac{n+1}{n+2}$. Demonstrația se face prin inducție matematică. **10.** $c_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $c_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$, $c_3 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$ și se arată prin inducție că $c_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, oricare ar fi $n \geqslant 1$. **11.** $a_2 = \frac{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}$, $a_3 = \frac{(\alpha^4 - \beta^4) - (\alpha^3 - \beta^3)}{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}$. Formula pentru a_n se demonstrează prin inducție matematică. **12.** a) Dacă $n = 2k$, atunci $S_{2k} = [0 + 1 + 2 + \ldots + (k-1)] + (1 + 2 + 3 + \ldots + k) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} k^2$. Dacă $n = 2k + 1$, atunci $S_{2k+1} = (0 + 1 + 2 + \ldots + k) + (1 + 2 + \ldots + k) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k(k+1)$. Demonstrația se face prin inducție matematică; b) Se poate considera separat fiecare din cazurile: I) p par, q par; II) p par, q impar; III) p impar, q par; IV) p impar, q impar. **13.** a) 2, −1, −4, −7, −10, $a_n = 2 + (-3)(n-1)$; b) $a_1 = 23$, $a_2 = 35$, $a_3 = 47$, $a_4 = 59$, $a_5 = 71$, $a_n = 23 + 12(n-1)$; c) $a_1 = 21$, $a_2 = 22\frac{1}{2}$, $a_3 = 24$, $a_4 = 25\frac{1}{2}$, $a_5 = 27$, $a_n = 21 + \frac{3}{2}(n-1)$; d) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, $a_5 = 19$, $a_n = 3 + 4(n-1)$. **14.** Avem $a_4 - a_2 = 2r = 6$, de unde $r = 3$. Obținem $a_1 = -10$, $a_3 = -4$, $a_5 = 2$, $a_6 = 5$. **15.** $a_1 = -13\alpha$. **16.** $n = 8$. **17.** a) $a_1 = -5$, $r = 2$; b) $a_1' = 4$, $r' = 1$ și $a_1'' = 6$, $r'' = -1$; c) $a_1 = 2$, $r = 2$. **18.** a) $S_{100} = 15\,050$; b) $S_{100} = 33\,350$. **19.** Se demonstrează că $y_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2}$. Se obține $y_1 = \alpha + \beta$, și $r = \alpha$. **20.** Avem $S_1 = \alpha + \beta + \gamma = a_1$, $S_2 = 4\alpha + 2\beta + \gamma = a_1 + a_2$, $S_3 = 9\alpha^2 + 3\beta + \gamma = a_1 + a_2 + a_3$. Pentru ca $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, trebuie ca $\gamma = 0$. În acest caz ($\gamma = 0$), șirul (a_n) este o progresie aritmetică. Avem $a_n = (2n-1)\alpha + \beta$. **21.** $r = \alpha$, $a_n = n\alpha$. **23.** Se verifică dacă este adevărată relația $b_k = \frac{b_{k-1} + b_{k+1}}{2}$. a) este progresie; b) este progresie; c) este progresie; d) nu este progresie; e) nu este progresie. **24.** Se observă că $a^2 + b^2 = \frac{(a + b^2) + (a - b)^2}{2}$. **25.** $a_1 = a - r$, $a_2 = a$, $a_3 = a + r$. Se aplică

teorema lui Pitagora şi se obţine $a = 4r$. Dacă $a_1 = 3r$, $a_2 = 4r$, $a_3 = 5r$ atunci $\frac{a_1}{3} = \frac{a_2}{4} = \frac{a_3}{5}$. **26.** a) $S_{2k} = -k$, iar $S_{2k+1} = k + 1$; b) $S_{2k} = -2k$, iar $S_{2k+1} = 2k + 1$. **28.** Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ şirul din enunţ. Atunci: $a_2 - a_1 = \gamma_1$, $a_3 - a_2 = \gamma_2, \ldots, a_n - a_{n-1} = \gamma_{n-1}$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ este o progresie aritmetică. Adunînd relaţiile, membru cu membru, se obţine $a_n = a_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1}$. Cum $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = 4, \ldots$ se obţine $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. **29.** Din egalitatea $a\sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}} + d\sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}} = b\sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}} + c\sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}}$ se deduce că $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$. **31.** Avem $T_{k+1} = C_m^k\, a^{m-k}\, b^k$ şi pentru $k = 5$, $T_6 = 21$. Mai mult, cum C_m^1, C_m^2, C_m^3 sînt în progresie aritmetică, rezultă $m = 7$. Se obţine ecuaţia $C_7^5 \cdot 2^{\lg(10-3x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 21$, adică $2^{\lg(10-3x)+(x-2)\lg 3} = 1$, de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. **32.** Ecuaţia din enunţ are exact patru rădăcini $\Leftrightarrow$ ecuaţia $y^2 + ay + a^4 = 0$ are două rădăcini pozitive y_1, y_2 cu $y_1 \neq y_2$. Dacă $y_1 < y_2$, atunci ecuaţia are rădăcinile $-\sqrt[4]{y_2}$, $-\sqrt[4]{y_1}$, $\sqrt[4]{y_1}$, $\sqrt[4]{y_2}$ scrise în ordinea crescătoare. Faptul că acestea sînt în progresie aritmetică înseamnă că $-\sqrt[4]{y_1} - (-\sqrt[4]{y_2}) = \sqrt[4]{y_1} - (-\sqrt[4]{y_1}) = \sqrt[4]{y_2} - \sqrt[4]{y_1}$ sau $\sqrt[4]{y_2} = 3\sqrt[4]{y_1}$, adică $y_2 = 81\, y_1$. Folosind relaţiile lui Viete, se obţine că $a = -\frac{9}{82}$ îndeplineşte condiţiile problemei. **33.** a) $b_1 = 3$, $b_2 = -6$, $b_3 = 12$, $b_4 = -24$, $b_5 = 48$; b) $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 24$, $b_5 = 48$; c) $b_1' = 5^7/3^5$, $b_2' = 5^6/3^4$, $b_3' = 5^5/3^3$, $b_4 = 5^4/3^2$, $b_5' = 5^3/3$; $b_1'' = -5^7/3^5$, $b_2'' = 5^6/3^4$, $b_3'' = -5^5/3^3$, $b_4'' = 5^4/3^2$, $b_5'' = -5^3/3$; d) $b_1 = 5$, $b_2 = 10$, $b_3 = 20$, $b_4 = 40$, $b_5 = 80$. **34.** $b_2 = 2\sqrt{3}$, $b_3 = 6\sqrt{2}$, $b_5 = 36\sqrt{2}$, $b_6 = 72\sqrt{3}$. **35.** a) 1, 2, 4, 8, 16 şi $-16, -8, -4, -2, -1$; b) 625, -375, 225, -135, 81. **36.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **37.** a) Da; b) Da; c) dacă $\beta \neq 0$, nu; d) Da; e) Da. **40.** Din relaţia dată se obţine $y^2 = xz$. **41.** Scriem suma (notată cu S) astfel:

$$\begin{aligned} S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ + 2^{99}&. \end{aligned}$$

Deci $S = \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} + \frac{2(2^{99}-1)}{2-1} + \frac{2^2(2^{98}-1)}{2-1} + \ldots + \frac{2^{98}(2^2-1)}{2-1} + \frac{2^{99}(2-1)}{2-1} = (2^{100}-1) + (2^{100}-2) + (2^{100}-2^2) + \ldots + (2^{100}-2^{98}) + (2^{100}-2^{99}) = 100 \cdot 2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 99 \cdot 2^{100} + 1$.
42. Se foloseşte formula $1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$, pentru $x \neq 1$.
44. Avem $3 = \frac{10-1}{3}$, $33 = \frac{10^2-1}{3}, \ldots, \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ ori}} = \frac{10^n-1}{3}$. Obţinem: $S = \frac{10(10^n-1)}{27} - \frac{n}{3}$. **45.** Dacă r este raţia progresiei aritmetice, iar q a celei

geometrice, se arată că $r \geqslant 0$, iar $q \geqslant 1$. Pentru a demonstra că $a_n \leqslant b_n$, observăm că $a_1 q^{n-1} - a_1 - (n-1) r = a_1 (q-1) [q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + + 1 - (n-1)]$, iar numărul din paranteza mare este pozitiv. Egalitatea tuturor termenilor celor două progresii are loc numai în cazul în care $q = 1$ (și deci $r = 0$). **47.** $3^{12/5}$, $3^{7/5}$, $3^{2/5}$, $3^{-3/5}$, $3^{-8/5}$. **48.** $S_1 = = 1 \cdot 13 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 13 + \ldots + 76 \cdot 13$ este suma numerelor $\leqslant 1\,000$ care se divid cu 13. $S_2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,000$ este suma tuturor numerelor $\leqslant 1\,000$. Sumă căutată este $S_2 - S_1 = 462\,462$. **49.** Primul termen este 2 sau 62/5. **50.** $a = 100$, $b = 20$, $c = 4$. **51.** Primul termen este 70 sau 10. **52.** Dacă n este par, atunci $a_1a_2 \ldots a_n = (a_1a_n)(a_2a_{n-1}) \ldots = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$. Dacă n este impar, atunci $a_1a_2 \ldots a_n = (a_1a_n)(a_2a_{n-1}) \ldots \left(a_{\frac{n-1}{2}} a_{\frac{n+3}{2}}\right) a_{\frac{n+1}{3}} = = (a_1a_n)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{a_1a_n} = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$. **53.** $b = \dfrac{a+c}{2}$, $c^2 = ab$, $a = \dfrac{2bc}{b+c}$. Deducem că b și c trebuie să verifice relația $2b^2 - bc = c^2$. **54.** Avem $a_1 + a_2 + \ldots + + a_{2n} = 5(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$; obținem $q = \dfrac{1}{4}$. **55.** Deducem $2a_1 + 9b_1 = 31$, $b_1(1 + a_1) = 9$, de unde $a_1 = \dfrac{25}{2}$, $b_1 = \dfrac{2}{3}$ și $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. **56.** Avem $a_1 + + r = b_1q$, $a_1 + 2r = b_1q^2 - 8$. Dar $a_1 = b_1$ și se obține $a_1 = \dfrac{r}{q-1}$, $a_1 = = \dfrac{2r+8}{q^2-1}$. Deci r și q satisfac relația $\dfrac{r}{q-1} = \dfrac{2r+8}{q^2-1}$, iar $a_1 (= b_1)$ este arbitrar. **57.** Avem $a_1 + r = \sqrt{a_1(a_1 + 3r)}$, de unde $a_1 = r$. Așadar $a_4 = 4a_1$, $a_6 = 6a_1$, $a_9 = 9a_1$ și evident $a_4 \cdot a_9 = a_6^2$; $q = \dfrac{3}{2}$. **58.** Dacă $0 < q < 1$ este rația progresiei geometrice, atunci $p = \dfrac{a_1}{a_2} \cdot \dfrac{a_3}{a_4} \ldots \dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \dfrac{a_1 \cdot (a_1q^2) \ldots (a_1q^{2n-2})}{(a_1q)(a_1q^3) \ldots (a_1q^{2n-1})}$. După efectuarea calculelor obținem $p = \dfrac{1}{q^n} < \dfrac{1}{q^{\frac{2n+1}{2}}} = \sqrt{\dfrac{a_1}{a_1q^{2n+1}}} = \sqrt{\dfrac{a_1}{a_{2n+2}}}$.

59. Numărul boabelor de grîu este $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$. **60.** $2^{64} - 1$. **61.** a) Se efectuează ridicările la pătrat și se însumează. Se obține i) $\dfrac{(a^{2n}-1)(a^{2n+2}-1)}{a^{2n}(a^2-1)} + 2n$; ii) $\dfrac{(a^{2n}-1)(a^{2n+2}-1)}{a^{2n}(a^2-1)} - 2n$.

62. a) Scriem $\dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = = \dfrac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \dfrac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \ldots + \dfrac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_n} = \dfrac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{r} + + \dfrac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{r} + \ldots + \dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{r} = \dfrac{1}{r}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})$;

b) $\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}(\sqrt{q}-1)} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}(1-\sqrt{1/q})} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}(1-\sqrt{1/q})} = \frac{1}{\sqrt{q}-1} + \underbrace{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} + \ldots + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}}_{n-1} = \frac{1+(n-1)\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}$. **63.** $S_1 = \frac{1}{a_1^p(q^p+1)}\left(1+\frac{1}{q^p}+\ldots+\frac{1}{q^{2p}}\right)$ şi $S_2 = \frac{1}{a_1^p(q^p-1)}\left(1+\frac{1}{q^p}+\ldots+\frac{1}{q^{2p}}\right)$ deci $\frac{S_1}{S_2} = \frac{q^p-1}{q^p+1}$, fiind raţia progresiei geometrice. **64.** Avem $a_k = S_k - S_{k-1} = (2k-1)a + b$. Este clar că şirul (a_k) este o progresie aritmetică în care $a_1 = a + b$ şi raţia $r = 2a$. **65.** Avem $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$. Să presupunem că pentru $k < n$, avem $a_k = \frac{1}{k!}$ şi să arătăm că $a_n = \frac{1}{n!}$. Într-adevăr, $a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_ka_{n-k} + \ldots + a_na_0 = a_n + \frac{1}{1!}\frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} + \ldots + \frac{1}{1!}\frac{1}{(n-1)!} + a_n = 2^na_n$. Deci $\frac{1}{n!}(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n) - \frac{1}{n!} + 2a_n = 2^na_n$, sau $\frac{2^n-2}{n!} + 2a_n = 2^na_n$, de unde $a_n = \frac{1}{n!}$. Folosind varianta a doua a metodei inducţiei matematice, avem $a_n = \frac{1}{n!}$, pentru orice n. **66.** a) Avem $a_{k+1}^p - a_k^p = (a_k + r)^p - a_k^p = C_p^1ra_k^{p-1} + C_p^2r^2a_k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_k + C_p^pr^p$, $p \geqslant 1$, fiind un număr natural. Considerăm acum relaţiile, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, adică

$$a_2^p - a_1^p = C_p^1ra_1^{p-1} + C_p^2r^2a_1^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_1 + C_p^pr^p,$$
$$a_3^p - a_2^p = C_p^1ra_2^{p-1} + C_p^2r^2a_2^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_2 + C_p^pr^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n+1}^p - a_n^p = C_p^1ra_n^{p-1} + C_p^2r^2a_n^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}r^{p-1}a_n + C_p^pr^p.$$

Adunind aceste relaţii, membru cu membru, obţinem relaţia cerută. b) Pentru $p = 1$, relaţiile ne dau $a_2 - a_1 = r$, $a_3 - a_2 = r$, ..., $a_n - a_{n-1} = r$, ceea ce ne arată că $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia r. **67.** *a*) Avem $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Se verifică uşor că pentru orice k, $q \leqslant k \leqslant n-1$, avem $(b_{k-1} - q)(b_{k+1} - q) = (b_k - q)^2$, deci $b_1 - q, b_2 - q, \ldots, b_n - q$ sînt în progresie geometrică. Raţia acestei progresii este egală cu α. Avem $b_n - q = (b_1 - q)\alpha^{n-1}$, de unde $b_n = (b_1 - q)\alpha^{n-1} + q$, unde $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$; b) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = (b_1 - q) + (b_2 - q) + \ldots + (b_n - q) + nq$. Folosind pct. a) se obţine $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{(b_1 - q)(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} + nq$, unde $q = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

68. Punînd $f(n) = a_n a_{n+1} \dots a_{n+k}$, avem $f(n+1) - f(n) = (k+1)ra_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k}$, unde r este rația. Dar $S = a_1a_2 \dots a_k + [(f(2) - f(1)) + (f(3)) - f(2)) + \dots + (f(n+1) - f(n))]\frac{1}{(k+1)r}$ de unde $S = a_1a_2 \dots a_k + \frac{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+k-1} - a_1a_2 \dots a_{k+1}}{(k+1)r}$. **69.** Punem $f(n) = \frac{1}{a_na_{n+1} \dots a_{n+k-2}}$ și procedăm ca la exercițiul precedent, folosind diferențele $f(n) - f(n+1)$. Avem $S = \frac{1}{(k-1)d}\left(\frac{1}{a_1a_2 \dots a_{k-1}} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k-1}}\right)$, unde d este rația progresiei. **70.** a) Calculăm $qS_1 - S_1$ și găsim $qS_1 - S_1 = \frac{q^{n+1} - q}{q-1} + nq^{n+1}$ de unde $S_1 = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}q}{(q-1)^2}$. b) Procedînd analog ca la a) găsim $S_q = 2\frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^3} - \frac{(2n-1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2} - \frac{n^2q^{n+1}}{q-1}$. **71.** Se observă că $a_{k+1} = \frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1}$. Calculînd apoi $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{2S_{n+1}}{n+1} - a_{n-k+1}\right)$ se găsește $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = 2 \cdot \frac{2^nS_{n+1}}{n+1} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}$, de unde rezultă relația căutată.

Capitolul XII

NOȚIUNI DE ARITMETICA NUMERELOR ÎNTREGI

1. a) 9; b) 1; c) 5; d) 8; e) 15; f) 20; g) 735. **2.** a) 40; b) 60; c) 50; d) 2. **3.** 149. **4.** 126. **5.** $a = 12$, $b = 48$ sau $a = 24$, $b = 36$ sau $a = 36$, $b = 24$ sau $a = 48$, $b = 12$. **6.** $a = 6$, $b = 216$ sau $a = 24$, $b = 54$. **7.** $a = 184$, $b = 176$ sau $a = 56$, $b = 16$. **8.** 1, 4, 8, 4, 4, 7, 5. **9.** a) 1, b) 1. **10.** 7^7 este de forma $4k + 3 \Rightarrow 7^{7^7} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$. Deci 3 este ultima cifră. **11.** $n \geqslant 5 \Rightarrow n! \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 1! + 2! + \dots + n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 3 \pmod{10}$. Deci 3 este ultima cifră. Un pătrat perfect are ultima cifră 0 sau 1 sau 4 sau 5 sau 6 sau 9. Pentru $n = 4, 1! + 2! + 3! + 4! = 33$ nu este pătrat perfect. **12.** n este de forma $7k$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$. Se calculează n^3 pentru fiecare caz în parte. **13.** $n = 1$ restul este 2; $n = 2k$ restul este 2, $n = 2k + 1$ $(k \geqslant 1)$ restul este 0. **14.** a) Fie $d = (5n + 3, 8n + 3) \Rightarrow d \mid -8(5k + 3) + 5(8n + 5) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$; b) $d = (33n + 4, 22n + 3) \Rightarrow d \mid 3\,(22n + 3) - 2(33\,n + 4) \Rightarrow d = 1$. **15.** Se face analog cu **14.** **16.** Fie $d = (5a + 17b, 2a + 7b)$ și $d' = (a, b)$; $d \mid 5(2a + 7b) - 2(5a + 17b) \Rightarrow d \mid b$; $d \mid 7(5a + 17b) - 17(2a + 7b) \Rightarrow d \mid a \Rightarrow d \mid d'$, dar $d' \mid d \Rightarrow d = d'$. **17.** $(a + b, a - b) = 2$ dacă a, b sînt prime impare; $(a + b, a - b) = 1$ dacă a sau b este egal cu 2. **18.** Se scrie $a = 7k + r$ $(0 \leqslant r \leqslant 6)$ și $b = 7l + s$ $(0 \leqslant s \leqslant 6)$. Se arată că $7 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow r = s = 0$. **19.** și **20.** Se

scrie $n = 6k + r$ cu $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **21.** $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 2$; dacă n este impar $\Rightarrow 1^n + 4^n \equiv 2^n + 3^n \pmod 5 \Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod{10}$. **23.** $\frac{(m+n)!}{m!n!} = C_{m+n}^n$. **24.** $5 | n^2 - 3n + 6 \Rightarrow 5 | n^2 + 2n + 6 \Rightarrow 5 | (n+1)^2 + 5 \Rightarrow 5 | (n+1)^2 \Rightarrow 5 | n + 1 \Rightarrow n = 5k - 1$. **25.** $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2) \Rightarrow 6 | n(n+1)(n+2)$. **26.** $n = 7k + 1$ sau $n = 7k + 3$; **27.** $n = 3k \pm 1$. **28.** $n = 3k \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+1} + 2^{3k+2} \equiv 3 + 2^2 \equiv 0 \pmod 7$, $n = 3k + 3 \Rightarrow 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+3} + 2^{3k+3} \equiv 27 + 8 \equiv 0 \pmod 7$, $n = 3k + 2 \Rightarrow 3^{3n+1} + 2^{n+2} = 3^{6k+5} + 2^{3k+4} \equiv 3^5 + 2^4 \equiv 0 \pmod 7$. Pentru celălalt exercițiu se ține cont că $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$. **29.** $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n} \equiv 2^{4n+1} + 3(-1)^{2n} \equiv (2^4)^n\, 2 + 3 \equiv 2 + 3 \equiv 0 \pmod 5$. **30.** $153^n + 45^n - 28^n \equiv 1 + 1 - 0 \equiv 0 \pmod 2$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 3^n - 3^n \equiv 0 \pmod 5$, $153^n + 45^n - 28^n \equiv 11^n - 11^n \equiv 0 \pmod{17}$. Deci numărul este divizibil cu $2 \cdot 5 \cdot 17 = 170$. **31.** și **32.** Se consideră cazurile $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$. **33.** $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 3 \cdot 9 + 4a\, 64^n \equiv 3(-2)^n + 4a(-2)^n \equiv (-2)^n(3 + 4a) \Rightarrow 11 | 4a + 3 \Rightarrow a = 11k + 2$. **34.** Se dezvoltă după binomul lui Newton, $(n+1)^n$. **35.** $C_p^k = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$. Cum $k < p \Rightarrow p$ este prim cu $1 \cdot 2 \dots k \Rightarrow p | C_p^k$. **36.** $2^p - 2 = (1+1)^p - 2 = C_p^1 + C_p^2 + \dots + C_p^{p-1}$ și se folosește 35. **37.** $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + 1) \Rightarrow a = 2$. Dacă $k = mn \Rightarrow 2^{mn} - 1 = (2^m)^n - 1 = (2^m - 1)((2^m)^{n-1} + \dots + 1) \Rightarrow 2^k - 1$ nu este prim. Deci trebuie k este un număr par. **38.** a) impar $\Rightarrow a^n + 1$ este par $\Rightarrow$ nu este număr prim, contradicție. Scriem $n = 2^t n'$ cu n' impar $\Rightarrow a^n + 1 = (a^{2^t})^{n'} + 1 = (a^{2^t+1})((a^{2^t})^{n'-1} + \dots + 1) \Rightarrow n' = 1 \Rightarrow n = 2^t$. **39.** 3 nu divide $3n^2 - 1$. Pentru a arăta că 5 nu divide pe $3n^2 - 1$ se scrie că n este de forma $5k$, $5k + 1$, $5k \pm 2$ și se calculează $3n^2 - 1$. Analog pentru 7. **40.** Se scrie $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$; $b = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$ unde $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ și $p_1, p_2, \dots, p_n$ sînt numere prime. Se obține $\alpha_i \leq 2\beta_i \leq 3\alpha_i \leq 4\beta_i \dots$ oricare ar fi $1 \leq i \leq n$. Din aceste inegalități se deduce că $\alpha_i = \beta_i$ $(1 \leq i \leq n) \Rightarrow a = b$. **41.** Orice număr de forma $4k - 1$ în descompunerea sa în factori primi conține un factor prim de forma $4l - 1$. Presupunem că există un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \dots, p_n$ de forma $4k - 1$. Fie $N = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Există un număr prim p de forma $4t - 1$ care divide pe $N \Rightarrow$ există $1 \leq k \leq n$ astfel încît $p = p_k \Rightarrow p_k | N \Rightarrow p_k | -1$, contradicție. **42.** Același raționament ca la problema **41.** **43.** $E = (n^2 + 3n + 1)^2$. **44.** $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{p}{q} - \sqrt{n} \Rightarrow m = \frac{p^2}{q^2} + n - 2\frac{p}{q}\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{m} \in \mathbf{Q}$. Fie $n = p_1 p_2 \dots p_t$, p_i prime și $\sqrt{n} = \frac{r}{s} \Rightarrow p_1 p_2 \dots p_t = \frac{r^2}{s^2} \Rightarrow p_i | r (\forall) i$, $1 \leq i \leq t \Rightarrow p_i | s \Rightarrow \frac{r}{s}$ nu este ireductibilă.
45. $p \geq 5 \Rightarrow p = 6k \pm 1 \Rightarrow p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 \Rightarrow 12(3k^2 \pm k) + 1$. **46.** Dacă $p = 3k \pm 1 \Rightarrow p^2 = \mathcal{M}3 + 1 \Rightarrow 8p^2 + 1$ se divide cu 3 deci nu este prim.

Deci $p = 3 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 73, 8p^2 - 1 = 71$. **47.** $(0, 0)$; $(2, 2)$. **48.** $(x-2)(y-2) = 4 \Rightarrow$ soluțiile $(3, 6)$; $(4, 4)$; $(6, 3)$. **49.** Se scrie $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = xy + 1$. Dacă $x > 2$ și $y > 2 \Rightarrow x^2 - 1 > x + 1$ și $y^2 - 1 > y + 1 \Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) > (x + 1)(y + 1) > xy + 1$. Dacă $x = 2 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y$ nu este natural. Dacă $x = 1 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$, nu este natural. **50.** $(285, 5)$; $(180, 10)$, $(5, 15)$. **51.** $[\sqrt{x}] = \frac{x-1}{4}$. Se ține cont că $\sqrt{x} - 1 < [\sqrt{x}] \leq \sqrt{x}$. Se obține $x = 13$ și $x = 17$. **52.** Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $12 \mid n^4 - n^2 - 24$. **53.** Dacă $n = p^\alpha m$ cu $m > 1$ și $(p, m) = 1$, atunci p nu divide pe C_n^p. Acum dacă $d = (C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1})$ și $d > 1$; există un număr prim q cu $q \mid d$. Cum $d \mid C_n^1 \Rightarrow q \mid n$ și putem scrie $n = q^\alpha m$ cu $(q, m) = 1$ și $m > 1$. Dar q nu divide $C_n^{q^\alpha}$ și deci q nu divide d, contradicție. Deci $d = 1$. **54.** Dacă $n = p^m$, atunci se arată că $(\forall)k$, $1 \leq k \leq n - 1$; p divide $C_{p^m}^k$. Apoi se arată că p^2 nu divide pe $C_{p^m}^{p^{m-1}}$. **55.** Fie N numărul format din ultimele 2 cifre ale lui 2^{999}. Avem $2^{999} \equiv N \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 2N \pmod{25}$. Dar $2^{20} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{1000} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 2N \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow N \equiv 13 \pmod{25}$ $\Rightarrow N = 13 + 25k$. Cum $4 \mid 2^{999} \Rightarrow 4 \mid N \Rightarrow 4 \mid 13 + 25k \Rightarrow k = 3 \Rightarrow N = 88$. **56.** $(2k + 1) + (2k + 2) + \ldots + [2k + (2n - 1)] = 2nk + n^2 = n(n + 2k)$. **57.** $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$ și fiecare factor este strict mai mare ca 1. **58.** Scriem $2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$. Dacă $A = 2^{2^{n-1}} - 1$, $B = 2^{2^{n-1}} + 1 \Rightarrow A$ și B sînt prime între ele. Se demonstrează afirmația prin inducție ținîndu-se cont de considerațiile făcute. **59.** Se ține cont că orice divizor d al lui n este de forma $d = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_n^{l_n}$ unde $0 \leq l_i \leq k_i$ $(\forall)i$, $1 \leq i \leq n$. **60.** $N = \overline{a_{n-1} \ldots a_0} = 10^{n-1} a_{n-1} + \overline{a_{n-2} \ldots a_0}$. Dar $\overline{a_{n-2} a_{n-3} \ldots a_0} < 10 \cdot 10 \ldots 10 = 10^{n-1} \Rightarrow N > a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$. **61.** Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, $n + 1$ numere. Pentru fiecare a_i, există un număr natural $\alpha_i \geq 0$ astfel încît $n + 1 \leq 2^{\alpha_i} a_i \leq 2n$. Rezultă că există i, j astfel încît $2^{\alpha_i} a_i = 2^{\alpha_j} a_j$. Dacă $\alpha_i \leq \alpha_j \Rightarrow a_i = 2^{\alpha_j - \alpha_i} a_j \Rightarrow a_j \mid a_i$. **62.** Avem $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$. Cum $6 \mid a + b + c \Rightarrow a, b$ sau c este par $\Rightarrow 6 \mid 3abc$. **63.** Dacă $m = n + 2 \Rightarrow n^2 + 2n + 2 \mid n^4 + 4$ și $n^2 + 2n + 2 \mid m^4 + 4$. **64.** În $50!$ 2 apare la exponentul egal cu

$$\sum_{\alpha \geq 1} \left[\frac{50}{2^\alpha}\right] = \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{4}\right] + \left[\frac{50}{8}\right] + \left[\frac{50}{16}\right] + \left[\frac{50}{32}\right] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47.$$

În $100!$, 2 are exponentul egal cu 97. **65.** Scriem $n + k = 2^{\alpha_k} u_k$, unde u_k este impar $(1 \leq k \leq m)$. Fie α_{k_0} cel mai mare dintre toți α_k. Se arată că α_{k_0} este unic. În continuare

$$N = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pm 1}{n + k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pm 1}{q^{\alpha_k} u_k} = \frac{\text{Sumă de numere pare} + \text{un număr impar}}{q^{\alpha_{k_0}} \cdot u}$$

unde u este impar. Deci $N = \frac{p}{q}$ unde p este impar și q este par $\Rightarrow N \notin \mathbf{Z}$.

66. Se observă că $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 5 = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5 = 8k + 5$. Dar orice pătrat perfect este de forma $8k + 1$. **67.** Dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_9$, 5 sînt impare şi 4 pare, de aceea trebuie să avem un factor de forma $a_k - k$, cu a_k impar şi k tot impar. **68.** Cubul unui număr întreg nedivizibil cu 9 este de forma $9k \pm 1$. Dacă nici unul din numerele a, b sau c nu este divizibil cu 9 înseamnă că $a^3 + b^3 + c^3$ este de forma $9k' \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9 pentru nici o combinaţie de semne. **69.** Numerele $n = 65\,k \pm 4$ cu $k \in \mathbf{Z}$, satisfac condiţiile. **70.** A se vedea **61.** **71.** Se demonstrează prin inducţie după n. Pentru $n = 1$ obţinem că din orice 3 numere se pot alege două cu suma pară. Dacă avem $2^{n+1} - 1$ numere le împărţim în $2^n - 1$ grupe de cîte două iar cel de-al $(2^{n+1} - 1)$-lea număr îl punem în prima grupă. Din acestea trei numere extragem două cu suma număr par. Numărul rămas îl aşezăm în grupa a doua apoi repetăm raţionamentul ş.a.m.d. **72.** Se ţine cont de formula care dă numărul tuturor divizorilor unui număr (a se vedea **73**). **73.** Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$; $p_1, p_2, \ldots, p_r$ numere prime $\Rightarrow$ numărul divizorilor pozitivi ai lui n este $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_r + 1)$ $\Rightarrow 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_r + 1) =$ numărul tuturor divizorilor. Acest număr este de forma $4m + 2 \Leftrightarrow \alpha_i + 1$ este impar $(\forall)i$, $1 \leqslant i \leqslant r \Leftrightarrow \alpha_i$ este par $(\forall)i$, $1 \leqslant i \leqslant r \Leftrightarrow |n|$ este un pătrat perfect. **74.** Fie n prim şi $n = 10^k + 10^{k-1} + \ldots + 10 + 1 = \dfrac{10^{k+1} - 1}{9}$. Suma cifrelor lui n este $k + 1$. Dacă $k + 1$ nu este prim $\Rightarrow k + 1 = r \cdot S$ cu $r > 1$ şi $S > 1 \Rightarrow n$ nu este prim. **75.** De exemplu, $(n + 1)! + 2$; $(n + 1)! + 3, \ldots, (n + 1)! + n + 1$. **76.** Dacă $m \geqslant n$ scriem $m = nq_1 + r_1$ cu $0 \leqslant r_1 \leqslant n$. Dacă $d = (a^m - 1, a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^m - a^n \Rightarrow d \mid a^{m-n} - 1 \Rightarrow d \mid (a^{m-n} - 1) - (a^n - 1) \Rightarrow d \mid a^{m-2n} - 1$ ş.a.m.d. rezultă $d \mid a^{m-nq} - 1 \Rightarrow d \mid a^{r_1} - 1$. Scriem acum $n = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leqslant r_2 \leqslant r_1$. La fel ca mai sus obţinem $d \mid a^{r_2} - 1$. Aplicînd algoritmul lui Euclid obţinem $d \mid a^{(m,\,n)} - 1$. Este clar că $a^{(m,\,n)} - 1$ divide pe $a^m - 1$ şi pe $a^n - 1$ şi deci $d = a^{(m,\,n)} - 1$. **77.** Fie $N = n! - 1$. Se arată că $(N, k) = 1$ $(\forall)k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Deci N are în descompunerea sa un număr prim mai mare ca n. **78.** Dacă $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{ab} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} \in \mathbf{Q}$ şi $\sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q} \Rightarrow a$, b sînt cuburi perfecte. **79.** $2^{30} \equiv 0 \pmod 8$. $2^{30} = 4^{15} = (5 - 1)^{15} = \mathcal{M}5^3 - C_{15}^2\, 5^2 + C_{15}^1\, 5 - 1 = \mathcal{M}5^3 + 74$. Deci $2^{30} = 824 \pmod{1000}$. **80.** $39^{40} = (40 - 1)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2 + 40 C_{30}^1 - 1 = \mathcal{M}10^3 + 199$. $38^{30} = (40 - 2)^{30} = \mathcal{M}10^3 - 40^2 C_{30}^2\, 2^{28} + 40 C_{30}^1\, 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 200 \cdot 2^{29} - 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 99 \cdot 2^{30} = \mathcal{M}10^3 + 99\,824 = \mathcal{M}10^3 + 576$. $39^{30} - 38^{30} = \mathcal{M}1000 + 199 - 576 = \mathcal{M}1000 + 623$. Deci ultimele 3 cifre sînt 6, 2, 3.

POLINOAME CU COEFICIENȚI COMPLECȘI. ECUAȚII ALGEBRICE

1. a) $q = X^3 - X - 4$, $r = 8$; b) $q = X + 6$, $r = 9X^2 + 5X - 5$, c) $q = X^4 + 2X^3 + 2X + 11$, $r = 2X - 8$; d) $q = X^5 + X^3 - X^2 + 9X - 5$, $r = 35X^2 - 29X + 6$. **2.** $q = 2X^3 - X^2 + 4X - 3$, $r = 6$; b) $3X^4 + 2X^3 + 11X^2 + 22X + 45$, $r = 93$; c) $-2X^5 + 14X^4 - 47X^3 + 141X^2 - 423X + 1272$, $r = -3809$; d) $q = 2X^2 + 4X - 9$, $r = 27/2$. **3.** $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. **4.** Pentru $m \neq -1$ și $m \neq 2$ (rădăcinile ecuației $m^2 + 3m + 2 = 0$) gradul polinomului este 4; pentru $m = -1$ gradul polinomului este zero; pentru $m = -2$ gradul polinomului este doi. **5.** $f\left(\sqrt[3]{7 + \sqrt{41}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}}\right) = 20$. **6.** Se aplică binomul lui Newton și se obține $f\left(\sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{2}}\right) = 5$. **7.** $f\left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}\right) = 9$. **8.** $f\left(\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}\right) = 16$. **9.** I) Folosind binomul lui Newton se calculează $f(a + f(a))$ și se obține: $f(a)[1 + a_1 + 2a_2a + a_2f(a) + \ldots]$; II) $a = ka_0$, $k \in \mathbf{Z}$. **10.** $f = kX$, $k \in \mathbf{R}$. **11.** $f(2) = 4$ și se găsește $m = -\dfrac{3}{2}$. **12.** $f(1) = 5$; $m_1 = 2$, $m_2 = -1$. **13.** Polinomul de grad minim este: $f = aX + b$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -3$ și se găsește $a = -\dfrac{5}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$. **14.** Scriem $f = (X - a)(X - b)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$. Avem $f(a) = \alpha a + \beta$ și $f(b) = \alpha b + \beta$. Apoi se rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases} \alpha a + \beta = f(a), \\ \alpha b + \beta = f(b). \end{cases}$

15. Scriem $f = (X^2 + 1)q + r$ unde $r = \alpha X + \beta$. Avem $f(i) = \alpha i + \beta$ unde $f(i) = (a_1 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - \ldots)$. **16.** $f(-2) = 0$, $m = -32$. **17.** $f(1) = 0$, $q = X^4 - 3X^3 - 2X + 3$. **18.** a) $f(-1) = (-2)^n - (2)^n = 0$; b) $(X - 1)^n - (X + 3)^n = [(X + 1) - 2]^n - [(X + 1) + 2]^n = -(X + 1)[C_n^1(X + 1)^{n-2}\, 2 + C_n^3(X + 1)^{n-4} \cdot 2^3 + C_n^5(X + 1)^{n-6}\, 2^5 + \ldots + C_n^{n-1}\, 2^{n-1}]$, pentru $n = 2k$. **19.** $f(\mathrm{i}) = (\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} + 1)^{4n+1} - \mathrm{i} = \mathrm{i}^{4n+1} - \mathrm{i} = 0$, $f(-\mathrm{i}) = 0$. **20.** Scriem $f = nX^{n+1}(X - 1) - X(X^n - 1) = (X - 1)[n\, X^{n+1} - X^n - X^{n-1} - \ldots - X]$. **21.** Scriem $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3 = (X - 1)[(X^n - 1) + (X^{n-1} - 1) + (X^{n-2} - 1)]$. **22.** *Metoda I.* Scriem $(2X^2 + X + 2)^{2n-1} + (2X^2 - X + 2)^{2n+3} = [2(X^2 + 1) + X]^{2n-1} + [2(X^2 + 1) - X]^{2n+3}$. Dezvoltînd după binomul lui Newton este suficient să arătăm că $X^{2n-1} - X^{2n+3}$ se divide prin $X^2 + 1$. $f = X^{2n-1} - X^{2n+3} = X^{2n-1}(1 - X^4) = X^{2n-1}(1 + X^2)(1 - X^2)$. *Metoda a II-a.* Se aplică teorema lui Bézout se calculează $f(\mathrm{i})$ și $f(-\mathrm{i})$; $f(\mathrm{i}) = i^{2n-1} + i^{2n+3} = i^{2n-1}(1 + \mathrm{i})^4 = 0$. La fel pentru $f(-\mathrm{i})$. **23.** Fie ε o rădăcină oarecare a polinomului $X^2 + X + 1$. Se aplică teorema lui Bézout $f(\varepsilon) = \varepsilon^{6n-1} + \varepsilon + 1 = \dfrac{\varepsilon^{6n}}{\varepsilon} + \varepsilon + 1 = \dfrac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon}{\varepsilon} = 0$. **24.** *Metoda I:* Scriem

$(X^4 - X - 1)^{2n+1} + (X^4 + X - 1)^{2n+5} = [(X^4 - 1) - X]^{2n+1} + [(X^4 - 1) + X]^{2n+5} =$. Aplicînd binomul lui Newton rezultă că este suficient să arătăm că $X^{2n+1} + (-X)^{2n+5}$ se divide prin $X^2 + 1$. Dar $-X^{2n+1} + X^{2n+5} = -X^{2n+1}(1 - X^4)$. *Metoda a II-a*: $f(i) = (1 - i - 1)^{2n+1} + (1 + i - 1)^{2n+5} = (-i)^{2n+1} + (i)^{2n+5} = 0$. **25.** *Metoda I*: $(X^2 + X - 1)^{4n+1} - X = [(X^2 - 1) + X]^{4n+1} - X$. Dezvoltînd după binomul lui Newton se constată că este suficient ca $X^{4n+1} - X$ să se dividă prin $X^2 - 1$. Se observă că $X^{4n+1} - X = X(X^{4n} - 1) = X(X^{2n} - 1)(X^{2n} + 1)$. *Metoda 2*: Se calculează $f(1) = 1^{4n+1} - 1 = 0$, $f(-1) = 0$. **26.** Se notează cu α rădăcina polinomului $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ care verifică $\alpha^5 - 1 = 0$ deci $\alpha^5 = 1$ şi $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Aplicînd teorema lui Bézout $f(\alpha) = \alpha^{5a_1} + \alpha^{5a_2+1} + \alpha^{5a_3+2} + \alpha^{5a_4+3} + \alpha^{5a_5+4} = (\alpha^5)^{a_1} + (\alpha^5)^{a_2}\cdot\alpha + (\alpha^5)^{a_3}\cdot\alpha^2 + (\alpha^5)^{a_4}\cdot\alpha^4 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$. **27.** $(X^2 + X + 1)^{8n+1} - X = [(X^2 + 1) + X]^{8n+1} - X =$ Dezvoltînd după binomul lui Newton este suficient să arătăm că $X^{8n+1} - X$ se divide cu $X^2 + 1$. Dar $X^{8n+1} - X = X(X^{8n} - 1) = X[(X^8)^4 - 1]$ se divide cu $X^8 - 1 = (X^4 + 1)(X^4 - 1) = (X^4 + 1)(X^2 + 1)(X^2 - 1)$. **28.** Se foloseşte teorema lui Bézout $f(\alpha) = (\alpha - 1)^{n+3} + \alpha^{2n+3} = (\alpha^2)^{n+3} + \alpha^{2n}\cdot\alpha^3 = \alpha^{2n}\cdot\alpha^6 + \alpha^{2n}\cdot\alpha^3 = \alpha^{2n}\alpha^3(\alpha^3 + 1) = 0$ (α este rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$ deci care verifică relaţiile $\alpha^3 = -1$ şi $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$). **29.** $f = (X + 1)^3\left(-\frac{3}{8}X^2 + \frac{9}{8}X - 1\right) + 1$. **30.** Fie $f = (X - 1)^m - X^m + 1$. Dacă α este o rădăcină a lui $X^2 - X + 1$ trebuie ca $f(\alpha) = 0$. Cum $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, atunci $f(\alpha) = \alpha^{2m} - \alpha^m + 1$. Dacă
$m = 6k \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^{12k} - \alpha^{6k} + 1 = +1 \neq 0$,
$m = 6k + 1 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$,
$m = 6k + 2 \Rightarrow f(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha + 1 \neq 0$, $m = 6k + 3 \Rightarrow f(\alpha) = +3 \neq 0$,
$m = 6k + 4 \Rightarrow f(\alpha) = +\alpha + \alpha^2 + 1 \neq 0$, $m = 6k + 5 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. Valorile lui m căutate sînt $m = 6k + 1$ şi $m = 6k + 5$. **31.** Se procedează la fel ca la problema precedentă. Se găseşte $m = 6k + 2$ şi $m = 6k + 4$. **32.** Pentru $x = 0$ egalitatea devine $0\cdot P(-1) = -26P(0) \Rightarrow P(0) = 0$. Pentru $x = 1$ egalitatea devine: $P(0) = -25P(1) \Rightarrow P(1) = 0$. Pentru $x = 26$ avem $26P(25) = 0$, $P(26) \Rightarrow P(25) = 0$. Rezultă că $P(X) = X(X-1)(X-25)Q(X)$. Înlocuind găsim o nouă relaţie $(X-2)Q(X-1) = (X-25)Q(X)$. Procedînd ca mai sus găsim că $Q(X) = (X-2)(X-24)R_1(X)$. Continuînd calculele se găseşte că $R_1(X) = (X-3)(X-23)R_2(X)$ rezultă $P(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)\ldots(X-24)(X-25)R(X)$. Înlocuind în egalitatea din enunţ rezultă că $R(X-1) = R(X)$ adică polinomul fiind de grad n îndeplineşte condiţiile $R(0) = R(1) = R(2)\ldots R(n) = k$ deci $P(X) = kX(X-1)(X-2)\ldots(X-25)$. **33.** Pentru $x = 0$ egalitatea devine $(-3)f(1) = 0$ deci $f(X)$ se divide cu $X - 1$. Pentru $X = 3$ vom avea

$3f(3) = 0$ deci $f(X)$ se divide cu $X - 3$. Rezultă că $f(X) = (X - 1)(X - 3) \cdot Q(X)$ și înlocuindu-se în relația dată $f(X)$ și $f(X + 1)$ se obține $(X - 1)Q(X) = (X - 2)Q(X + 1)$. Pentru $x = 2$, $Q(2) = 0$ deci $Q(X)$ se divide cu $X - 2$ deci $f(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)R(X)$ și înlocuind în egalitatea din enunț obținem: $X(X - 1)(X - 2)(X - 3)R(X) = (X - 3)X(X - 1)(X - 2)R(X + 1)$ deci $R(X) = R(X + 1)$ pentru orice $X \in \mathbf{R}$ adică $R(0) = R(1) = R(2) = \ldots = R(n) = k$. Rezultă că polinomul de gradul n, $R(X) = K (\forall) X \in \mathbf{R}$. Deci $f(X) = K(X - 1)(X - 2)(X - 3)$. **34.** Dacă $f(X) = \frac{1}{2}\left[cX^2 + (2b - c)X + 2a\right]$ $a, b, c \in \mathbf{Z}$, atunci $f(n) = \frac{1}{2}\left[cn^2 + (2b - c)n + 2a\right] = \frac{1}{2}[cn(n - 1) + 2(bn + a)]$, $n(n - 1)$ se divide la 2 $(\forall) n \in \mathbf{Z}$. Deci $f(n) \in \mathbf{Z}$. Reciproc, fie $f(X) = aX^2 + bX + c$, $a, b, c, \in \mathbf{Q}$. Dacă $f(n) \in \mathbf{Z}$ $(\forall) n \in \mathbf{Z}$ atunci și $f(0) \in \mathbf{Z}$, $f(1) \in \mathbf{Z}$, $f(-1) \in \mathbf{Z}$. Dar $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$. Deci $c \in \mathbf{Z}$ $a + b + c = K_1 \in \mathbf{Z}$, $a - b + c = K_2 \in \mathbf{Z}$. Rezultă că există: $a = \frac{K_1 + K_2 - 2c}{2}$, $b = \frac{K_1 - K_2}{2}$, $c = c$. Între $K_1 + K_2 - 2c$ și $K_1 - K_2$ relația $K_1 + K_2 - 2c = m \Rightarrow K_1 - K_2 = 2n - m$ deci $f(x) = \frac{1}{2}[mx^2 + (2n - m)X + 2c]$ unde $m, n, c \in \mathbf{Z}$. **35.** a) c.m.m.d.c. $= 2X^2 - 3X + 2$; b) c.m.m.d.c. $= X - 2$; c) c.m.m.d.c. $= X^2 + 2X + 2$; d) c.m.m.d.c. $= X^2 + 2X + 2$; e) c.m.m.d.c. $= 2X^2 + 5X + 3$. **36.** Se arată că c.m.m.d.c. $= 1$. **37.** Dacă $f(X)$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $X^n - 1$ și $X^m - 1$, atunci orice rădăcină a lui $f(X)$ este o rădăcină a lui $X^d - 1$ unde $d = (m, n)$ este un c.m.m.d.c. Invers, aplicînd teorema: Fie f și g două polinoame. Dacă d este c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci există polinoamele u și v astfel încît $d = uf + vg$, orice rădăcină a lui $X^d - 1$ este rădăcină a lui $f(X)$. Deci $f(X) = X^d - 1$. **38.** Fie $d = (m, n)$. Procedînd ca la exercițiul precedent se obține: dacă numerele $\frac{m}{d}$ și $\frac{n}{d}$ sînt impare, atunci un c.m.m.d.c. al polinoamelor date este $X^d + a^d$ dacă cel puțin unul dintre numerele $\frac{m}{d}$ și $\frac{n}{d}$ este par, un c.m.m.d.c. al polinoamelor este 1. **39.** a) $X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X - 1)(X + 1)$; b) $X^6 - 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X - 1) \cdot (X^2 + X + 1)$; c) $X^8 - 1 = (X^4 + 1) \cdot (X^2 + 1)(X + 1)(X - 1) = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \cdot (X^2 + 1) \cdot (X + 1)(X - 1)$. **40.** $f = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

41. a) Folosind formulele lui Viète se obține $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$.

$x_4 = -2$; b) $m = -20$, $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = -3$; c) $m = 47$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = -\frac{1}{6}$; d) $m = -228$, $x_1 = -3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 3 - 2\sqrt{5}$, $x_4 = 3 + 2\sqrt{5}$; e) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; f) $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $x_3 = -\frac{1}{3}$; g) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$; h) $m = 35$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$, $x_4 = -4$; i) $m = 24$, $x_1 = -3$, $x_2 = -4$, $x_2 = 2$; j) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 5$, $x_3 = -7$; k) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{3}$ etc.

42. a) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$ atunci $x_1^3 + px_1 + q = 0$, $x_2^3 + px_2 + q = 0$, $x_3^3 + px_3 + q = 0$. Se adună aceste relații membru cu membru şi se obține: $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q + pS_1 = -3q - p \cdot 0 = -3q$. Pentru a obține pe $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, se înmulțesc ecuațiile de mai sus cu x_1, x_2 respectiv x_3 şi se obține $S_4 = -pS_2 - qS_1$ (am notat $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ş.a.m.d.). Se procedează în continuare la fel şi se obține S_7; b) Se procedează ca la punctul a).

43. a) Desfacem parantezele şi regrupăm termenii dînd factor pe m şi se obține $(x-2)(x^2 + (2m-3)x + 3 - m) = 0$; b) Ținînd cont că $|x_2 - x_3| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2}$ şi de relațiile dintre rădăcini și coeficienți pentru ecuația de gradul doi se obține: $m_1 = 4$, $m_2 = -\frac{1}{2}$. **44.** a) Ecuația se mai poate scrie $a^2(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) - 2ax(-2x^3 + x^2 + 8x - 4) + (-2x^3 + x^2 + 8x - 4) = 0$; rădăcinile independente de a sînt $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{1}{2}$; b) Rădăcina care depinde de a, $x_4 = \frac{a^2+1}{2a}$ se găsește $a = 0$. **45.** a) Pentru ca ecuația să aibă o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$ trebuie ca $f(-1) \cdot f(1) < 0$ şi $f(-1)f(1) = -(m+1)^2$; b) Folosind formulele lui Viète se obține $m = -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; c) Relația se mai poate scrie $x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 < 6x_1^2x_2^2x_3^2$; $x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 = (x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$. Din relațiile lui Viète se obține $m^2 - 4 < 0$; $m \in (-2, 2)$. **46.** Demonstrăm prin reducerea la absurd. Rezultă că toate rădăcinile sînt reale. Dar $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_ix_j \Rightarrow (a+1)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right) + \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \Rightarrow -a^2 + a - 1 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$, contradicție deoarece $-a^2 + a - 1 < 0$ $(\forall) a \in \mathbf{R}$.

47. La fel ca la exercițiul de mai sus, se observă că $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = -m^2 - 2$.

48. Scriem $f(X-1) = X^3 - 2X^2 + (a+1)X - a + b$. Aplicăm teorema lui Bézout şi $f(-1) = -4 \Rightarrow -2a + b = 0$. Din relațiile lui Viète şi la fel ca la exercițiul 42 se obține $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3a - 3b$ de unde $a - b = 3$. Se

obține $a = -3$, $b = -6$. **49.** Se procedează ca la exercițiul de mai sus și se obține: $a = -\frac{1\,117}{14}$; $b = -\frac{2\,227}{14}$. **50.** Scriem $e^{f(x)} \leqslant 1$, $e^{x^4-2x^3+2x-1} \leqslant e^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \leqslant 0$; $(x^2-1)(x-1)^2 \leqslant 0$; $x \in [-1, 1]$. **52.** Dacă α este o rădăcină dublă, atunci α este rădăcină a lui $f - D(f) = \frac{X^n}{n!}$. Deci $\alpha = 0$. Dar $f(0) = 1$, contradicție. **54.** Se calculează $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ ca în exercițiul 42 și se obține $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5m$; $5m = 10$; $m = 2$. **55.** Se face transformarea $y = x + 1$ deci $x = y - 1$ și se înlocuiește în prima ecuație și se obține $y^3 - y^2(3-a) + y(3-2a+b) + a - b + c - 1 = 0$. De unde se găsește sistemul $a - b - c = 3$; $3a - b + c = 3$; $2b - c = -1$. Se obține $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. **56.** Se calculează $f(-1) \cdot f(1)$ și se arată că $f(-1) \cdot f(1) = -(m^2 - m + 1)(m^2 + m + 5)$. Deci $f(-1) \cdot f(1) < 0$. **57.** Considerăm rădăcinile $x_2 = qx_1$, $x_3 = q^2x_1$, $x_4 = q^3x_1$. Aplicînd relațiile lui Viète se găsește $q = -1$, $x_1 = 2$; $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$ și $m = 16$. **58.** a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m + 3$ din relațiile lui Viète; b) $-m^3 - 3m + 3 \geqslant$ $\geqslant 3(m+1)^2 \Rightarrow -m^3 - 3m^2 - 3m \geqslant 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$; c) Se calculează $f(1)$ și se găsește $m = -1$, rădăcinile ecuației sînt $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}\mathrm{i}$, $x_3 = -\sqrt{2}\mathrm{i}$. **59.** a) Se aplică relațiile lui Viète și se obține ecuația: $S_1^6 + 20S_1^2 - 144 = 0$ (unde $S_1 = x_1 + x_2$). Se rezolvă ecuația și se găsește că $S_1 = 2 \cdot S_2 = -2$; b) Rădăcinile ecuației sînt: $x_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = 1 - 2\mathrm{i}$, $x_3 = -1 + \sqrt{2}$, $x_4 = -1 - \sqrt{2}$ sau $x_1 = -1 + 2\mathrm{i}$, $x_2 = -1 - 2\mathrm{i}$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 - \sqrt{2}$. **60.** Scriem a) $X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p = (X^2+1)(X^2 - 2X) + (n+2)X + p$ de unde se obține că $n = -2$ și $p = 0$. b) $g(1) + g(2) + \ldots + g(n) = (1-2) + (2^2 - 2\cdot 2) + (3^2 - 3\cdot 2) + \ldots + (n^2 - n\cdot 2) = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$. **61.** $f(1) + f(2) + f(1) + \ldots + f(n) = a(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + b(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + c(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + nd$. Din $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = n^4$ se găsește $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$. **62.** Se verifică rădăcina $x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$. Se formează relațiile Viète și se găsește că $x_2 + x_3 = -x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ și $x_2x_3 = \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} + 1$. Se formează ecuația de gradul doi și se constată că $\Delta < 0$. **63.** **64.** Se procedează analog ca la exercițiul 62. **65.** Rădăcina reală este $z = 2$. Scriem $z^3 - (3+2\mathrm{i})z^2 + (5+7\mathrm{i})z - 6(1+\mathrm{i}) = (z-2)[z^2 - (1+2\mathrm{i})z + 3(1+\mathrm{i})] = 0$. **66.** a) Se aplică teorema lui Bézout și se obține sistemul de ecuații $c = 0$; $1 + a + b = 0$; $1 - a - b = 0$. Sistem care nu are

soluții; b) Ecuația admite ca rădăcină și pe $x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; se obține $a = -2$, $b = 1$, $c = -2$. Rădăcinile reale ale ecuațiilor sînt $x_3 = 2$, $x_4 = -1$. **67.** Aplicînd relațiile lui Viète se obține $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ și $m = -7$. **68.** Se aplică relațiile lui Viète și se ține cont de exercițiul **42. 69.** Se folosesc relațiile lui Viète și se găsesc sistemele de soluții: $(a = \lambda,\ b = 0,\ c = 0)$, $(a = \lambda,\ b = -1,\ c = 1)$ $\lambda \in \mathbf{R}$. **70.** Teoremă: orice polinom $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ de grad $n \geqslant 1$ cu coeficienți reali este un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienți reali, adică poate fi scris sub forma: $f = a_n(X - \alpha_1)^{K_1} \ldots (X - \alpha_p)^{K_p}(X^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \ldots (X^2 + b_sx + c_s)^{K_s}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbf{R}$ și $b_1^2 - 4c_1 < 0, \ldots, b_s^2 - 4c_s < 0$. Aplicînd această teoremă și ținînd cont de ipoteză, f se scrie sub forma $f = g^2 \cdot h$ unde h nu are nici o rădăcină reală. Vom împărți rădăcinile complexe ale lui h în două grupe: rădăcinile complexe conjugate fac parte din grupe distincte. Făcînd produsul factorilor liniari care corespund rădăcinilor fiecărei grupe obținem polinoamele $h_1 + ih_2$ și $h_1 - ih_2$ și $h = (h_1 + ih_2)(h_1 - ih_2) = h_1^2 + h_2^2$. Deci $f = (gh_1)^2 + (gh_2)^2$. **71.** Dacă α este o rădăcină întreagă a lui f avem $f = (X - \alpha)g$. Deci $f(a) = (a - \alpha)g(0)$ și $f(a + 1) = (a + 1 - \alpha)g(1)$, de unde $a - \alpha \mid f(0)$ și $a + 1 - \alpha) \mid f(1)$, contradicție. **72.** Conform ipotezei există a_1, a_2, a_3, a_4 numere întregi distincte astfel încît $f - 1 = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a)_4g$ unde $g \in \mathbf{Z}[X]$. Dar oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$ numărul $(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)(a - a_4)$ nu poate fi egal cu -2. Deci $f(a) - 1 \neq -2$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$. Pentru ultima afirmație din problemă răspunsul este negativ. **73.** Din teorema lui Bézout obținem $f - 12 = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)g$ unde $g \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă $f(k) = 17 \Rightarrow (k - a)(k - b)(k - c)(k - d)g(k) = 29$, 29 fiind prim $\Rightarrow$ cel puțin 2 factori dintre $k - a$, $k - b$, $k - c$, $k - d$, sînt egali cu $+1$ sau -1. De exemplu dacă $k - a = k - b = -1 \Rightarrow a = b$, contradicție. **74.** Se aplică același procedeu ca în problema **73. 75.** a) Se desființează parantezele și se face o nouă grupare de termeni și se obține: $(x^2 + 3)(x^2 + mx + 2m) = 0$; b) La fel ca la exercițiul de mai sus se obține $x^4 + 2x^3 + (m - 1)x^2 - 2x - m = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + m) = 0$. **76.** a) Se face schimbarea de variabilă $y = \frac{-3 - x}{x}$ și se obține ecuația $y^3 + 18y^2 + 60y + 16 = 0$. b) Se calculează

$$y_1 + y_2 + y_3 = -\left[\frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2}{(x_1x_2x_3)^2}\right] + 3 = -16;\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 3(x_1x_2x_3)}{(x_1x_2x_3)^2} = -16;\ y_1y_2y_3 =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_3^2 - x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3^2 - 1}{(x_1x_2x_3)^2} = 0;$$ deci ecuația este

$y^3 + 16y^2 - 16y = 0$. c) Se procedează ca la punctul b și se găsește $y_1 + y_2 + y_3 = 22$; $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 60$; $y_1y_2y_3 = 40$ deci ecuația este $y^3 - 22y^2 + 60y - 40 = 0$. d) Se face schimbarea de variabili $x = -3 - y$ și

se obține ecuația $y^3 + 6y^2 + 4y - 16 = 0$. e) Se face schimbarea de variabilă $x = -\frac{1}{y}$ și se obține ecuația $y^3 + 5y^2 + 3y - 1 = 0$. f) Se face schimbarea de variabilă $x = \frac{1 + 3y}{-y}$ și se obține ecuația $16y^3 - 4y^2 - 6y - 1 = 0$. **77.** a) Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{k-1}$ și se obține $y^3 - 3(k-1)^2 y + (k-1)^3$. b) Se aplică relațiile lui Viète și se obține ecuația $y^3 - 9y^2 + 18y + 24 = 0$. c) $y_1 = 6 - x_1^2$, $y_2 = 6 - x_2^2$, $y_3 = 6 - x_3^2$; $y_1 + y_2 + y_3 = 12$; $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 45$; $y_1y_2y_3 = 53$, deci ecuația este $y^3 - 12y^2 + 45y - 53 = 0$. **78.** Scriem $E = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 - x_1^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 - x_2^2}{x_2^2} = \frac{2p}{x_1^2} - 1 + \frac{2p}{x_2^2} - 1 + \frac{2p}{x_3^2} - 1 = \frac{2p^3 - 3q^2}{q^2}$. **79.** Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sint rădăcinile ecuației atunci avem: $x_1^4 - 2x_1^3 + 3x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0$; $x_2^4 - 2x_2^3 + 3x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0$; $x_3^4 - 2x_3^3 + x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$; $x_4^4 - 2x_4^3 + 3x_4^2 - 4x_4 + 1 = 0$. Se împart egalitățile cu x_1, x_2, x_3 respectiv x_4 și se adună acestea membru cu membru obținindu-se: $S_3 - 2S_2 + 3S_1 - 16 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0$ unde $S_i = x_1^i + x_2^i + x_3^i + x_4^i$. Se fac calcule și se obține $S_3 = 2$. **80.** a) $x_1 = 3\sqrt{2}$, $x_2 = -3\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = -1$; b) $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$; c) $x_1 = 6i$, $x_2 = -6i$, $x_3 = -\frac{1}{5}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$; d) $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $m = 23$; $n = 10$; e) $x_1 = \sqrt{2} + i$, $x_2 = \sqrt{2} - i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{1}{2}$; f) $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{5} + \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $x_5 = 56$; g) $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -64$; h) $x_1 = -i$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$; i) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = 0$; $n = -1$, $p = 0$; j) $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $a = -37$, $b = 30$; k) $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_3 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $m = -10$, $n = 1$. **81.** Se aplică teorema lui Bézout, $m = 1$, $n = p = -2$, $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -1 - i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **82.** a) Se face substituția $x^2 = y$ și se obține $x_1 = \sqrt{2n^2 - 3}$, $x_2 = -\sqrt{2m^2 - 3}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$; c) $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = -2\sqrt{3}$, $x_3 = 2\sqrt{2}$, $x_4 = -2\sqrt{2}$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}$,

$x_3 = -\frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1 - i\sqrt{3}$, $x_6 = 1 + i\sqrt{3}$; e) $x_1 = +\sqrt{m+1}$, $x_2 = -\sqrt{m+1}$, $x_3 = \sqrt{m}$, $x_4 = -\sqrt{m}$; f) $x_1 = \sqrt{m}$, $x_2 = -\sqrt{m}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **83.** a) $x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{4}$, $x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{4}$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{3 + i\sqrt{55}}{8}$, $x_4 = \frac{3 - i\sqrt{55}}{8}$; c) $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; d) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$; e) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$; f) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2}$. **84.** Se notează $x^2 = y$ și se obține ecuația $y^3 - (m-1)y^2 + (m - m^2)y + 2m - m^2 = 0$. Această ecuație se scrie $(y+1)(y^2 - my + 2m - m^2) = 0$. Se obține rădăcina $y_1 = -1$ și rădăcinile y_2, y_3 ale ecuației $y^2 - my + 2m - m^2 = 0$. **85.** Se împarte cu x^2 și se notează $x + \frac{m}{x} = y$ și se obține ecuația $y^2 + y + 1 - 2m = 0$. **86.** Scriem $(x^2 + 1)(x - 1)^2 - ax^2 = x^4 - 2x^3 + (2 - a)x^2 - 2x + 1 = 0$ ecuația reciprocă. **87.** Se împarte cu x^2 și se notează $x = \frac{c}{x} = y$; se obține ecuația $y^2 + ay + b - 2c = 0$. **88.** $(x + z)^n = (x + \bar{z})^n \Rightarrow \left(\frac{x+z}{x+\bar{z}}\right)^n = 1$; $\frac{x+z}{x+\bar{z}} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \Rightarrow \frac{x + a + bi}{x + a - bi} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \Rightarrow \frac{x+a}{-bi} =$

$$= \frac{1 + \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}} \Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n} + 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+a}{-bi} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{-i\,2\sin\frac{k\pi}{n}} \Rightarrow \frac{x+a}{-b} = 2\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}.$$

89. $(1 - X)f = a_0 + (a_1 - a_0)X + (a_2 - a_1)X^2 + \ldots + (a_n - a_{n-1})X^n - a_nX^{n+1}$. Dacă $|\alpha| > 1 \Rightarrow |f(\alpha)(1 - \alpha)| \geqslant a_n|\alpha|^{n+1} - |a_0 + (a_1 - a_0) + \ldots + (a_n - a_{n-1})\alpha^n| > a_n|\alpha|^{n+1} - |\alpha|^n(a_0 + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \ldots + a_n - a_{n-1}) = a_n|\alpha|^n(|\alpha| - 1) > 0$. Deci $f(\alpha) > 0$ contradicție. **90.** Fie $f = \sum_{i \geqslant 0} a_iX^i$, $g = \sum_{i \geqslant 0} b_iX^i$; presupunem că $p \mid a_0$, $p \mid a_1$, ..., $p \mid a_{k-1}$, $p \nmid a_k$ și $p \mid b_0$,

$p \mid b_1, \ldots, p \mid b_{l-1}, p \nmid b_l$. Scriem $fg = \sum_{i \geq 0} c_i X^i$, $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$. Avem $c_{k+l} = a_0 b_{k+l} + a_1 b_{k+l-1} + \ldots + a_k a_l + a_{k+1} a_{l-1}, \ldots, a_{k+l} b_0 \Rightarrow p \nmid c_{k+l} \Rightarrow p \nmid fg$, contradicţie. **91.** $f = c(f)f'$, $g = c(g)g'$; $f', g' \in \mathbf{Z}[X]$ şi $c(f') = c(g') = 1$. Folosind problema **90** rezultă $c(f'g') = 1 \Rightarrow c(fg) = c(f) \cdot c(g)$. **92.** Presupunem că $f = gh$, $g = b_0 + b_1 X + \ldots + b_r X^r$, $h = c_0 + c_1 X + \ldots + c_s X^s$, $g, h \in \mathbf{Z}[X]$. Avem $a_0 = b_0 c_0$, $a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$, $a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$, $\ldots$, $a_l = b_l c_0 + b_{l-1} c_1 + \ldots + b_0 c_l$. Cum $p \mid a_0$ şi $p^2 \nmid a_0 \Rightarrow p \mid b_0 c_0 \Rightarrow p \mid b_0$ şi $p \nmid c_0$. Din $p \mid a_1 \Rightarrow p \mid b_1 c_0 \Rightarrow p \mid b_1$; $p \mid a_2 \Rightarrow p \mid b_2 c_0 \Rightarrow p \mid b_2$. Continuînd din $p \mid a_r (r \leq n-1) \Rightarrow p \mid b_r \Rightarrow p \mid a_n$, contradicţie. **93.** $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$; $f = \frac{X^p - 1}{X - 1}$. Se arată că polinomul $g = f(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + C_p^1 X^{p-2} + C_p^2 X^{p-3} + \ldots + C_p^{p-1}$ este ireductibil cu criteriul lui Eisenstein ($p \mid C_p^k$; $1 \leq k \leq p-1$) şi deci rezultă că f este ireductibil. **94.** Se aplică problema **93**. **95.** Se aplică criteriul lui Eisenstein pentru $p = 3$ sau $p = 5$. **96.** Se aplică criteriul lui Eisenstein. **97.** $f = X^{2^n} + 1$. Se arată că polinomul $g = f(X+1)$ este ireductibil cu criteriul lui Eisenstein $g = X^{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n - 1} C_{2^n}^k + 2$. Se arată că $2 \mid C_{2^n}^k$ $(\forall)\, 1 \leq k \leq 2^n - 1$. **98.** Polinomul este un produs dintre un polinom de gradul I şi unul de gradul III $\Leftrightarrow$ polinomul are o rădăcină întreagă $\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ este o rădăcină $\Leftrightarrow a + b + 2 = 0$ sau $a - b + 2 = 0$. Avem: $X^4 + aX^2 + bX + 1 = (X^2 + \alpha X + \beta)(X^2 + \alpha' X + \beta')$ ($\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \beta\beta' = 1$, $\alpha\beta' + \alpha'\beta = b$, $\alpha\alpha' + \beta + \beta' = a$, $\alpha + \alpha' = 0$. Dacă $\beta = \beta' = 1 \Rightarrow b = 0$ şi $a = 2 - k^2$, $k \in \mathbf{Z}$ cu $k \neq \pm 2$. Dacă $\beta = \beta' = -1 \Rightarrow b = 0$ şi $a = -2 - k^2$ cu $k \neq 0$. **99.** Presupunem $f = gh$ cu $g, h \in \mathbf{Z}[X]$. Cum $f(a_i) = -1$, atunci $g(a_i)h(a_i) = -1$. Deci $g(a_i) = -1$ şi $h(a_i) = 1$ sau $g(a_i) = 1$ şi $h(a_i) = -1$ de unde $(g+h)(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Cum grad $(g + h) < n$ avem $g + h = 0$. Deci $f = -g^2$, contradicţie deoarece coeficientul de grad maxim al lui f este 1. **100.** Dacă $f = (X - \alpha)g$ cu $\alpha \in \mathbf{Z}$ şi $g \in \mathbf{Z}[X] \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \mid c$. Cum $(a + b)c = \text{impar} \Rightarrow a + b = \text{impar}$ şi $c = \text{impar} \Rightarrow \alpha = \text{impar}$. Din egalitatea $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow \alpha(a\alpha + b)$ par $\Rightarrow a\alpha + b$ par $\Rightarrow a + b = \text{par}$, contradicţie. **101.** Se verifică prin calcul direct. **102.** a) Se determină mai întîi λ_n; apoi din egalitatea $f - \lambda_n f_n = \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_{n-1} f_{n-1}$; se determină $\lambda_{n-1}, \ldots$, în final se determină λ_0; b) rezultă din a). **103.** Se înlocuieşte X cu a_1 şi obţinem α_0, apoi se înlocuieşte X cu a_2 şi se obţine α_1; apoi se înlocuieşte X cu a_3 şi se obţine α_2 ş.a.m.d. **104.** Folosind problema **102**, considerînd polinoamele $f_k = \frac{X(X-1)(X-2)\ldots(X-K+1)}{k!}$, $f = \lambda_c f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$. Cum $f(0), f(1), \ldots, f(n)$ sînt numere întregi se obţin $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{Z}$. Dacă $m > n$ avem $f_k(m) = C_m^k \Rightarrow f(m) \in \mathbf{Z}$. Dacă $0 \leq m \leq n$ avem $f_k(m) = 0$ pentru $k > m$ şi $f_k(m) = C_m^k$ pentru $k \leq m$. Deci $f(m) \in \mathbf{Z}$. Analog în cazul cînd $m < 0$ obţinem $f_k(m) \in \mathbf{Z}$ şi deci $f(m) \in \mathbf{Z}$.

PERMUTĂRI

2. a) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; b) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; c) $\sigma^{2k} = e$, $\sigma^{2k+1} = \sigma$; d) $\sigma^{4k} = e$, $\sigma^{4k+1} = \sigma$, $\sigma^{4k+2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4k+3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $x = e$ (permutarea identică). **4.** $\sigma^{123} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma^{210} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{145} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **5.** $\sigma^{100} = e$, $\sigma^{151} = \sigma^{651} = \sigma$; **6.** a) $m(\sigma) = 2$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; b) $m(\sigma) = 4$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; c) $m(\sigma) = 4$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; d) $m(\sigma) = 7$, $\varepsilon(\sigma) = -1$; e) $m(\sigma) = 6$, $\varepsilon(\sigma) = 1$; f) $m(\sigma) = 9$, $\varepsilon(\sigma) = -1$; g) $m(\sigma) = 9$, $\varepsilon(\sigma) = -1$. **7.** Cum $\varepsilon(x^2) = +1$ şi $\varepsilon(u) = -1$ nu există nici o permutare. **8.** $\varepsilon(x^2) = +1$, $\varepsilon(u) = -1$; nu există nici o permutare. **9.** $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **10.** $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **11.** $i = 5$, $j = 2$; **12.** $i = 5$, $j = 6$. **13.** $m(\sigma) = n(n-1)$ şi σ este întotdeauna pară; **14.** $4!\,(1 + 2 + 4 + 5 + 6)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 4\,799\,952$. **15.** al 112-lea. **16.** Obţinem $\frac{5!}{2!} = 60$ numere distincte, suma lor este $\frac{4!}{2!}(1 + 2 + 4 + 5 + 5)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 2\,266\,644$.

17. Fie $\sigma \in S_n$ pentru care P_σ este maxim. Fie $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $i < j$. Fie transpoziţia $\tau_{ij} = (ij)$ şi permutarea $\tau = \tau \circ \tau_{ij}$. Avem $P_\tau \leqslant P_\sigma$. Cum $P_\tau = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} \left(a_k^r + \frac{1}{a_{\sigma(k)}^s}\right)\left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s}\right) \cdot \left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s}\right)$ atunci din $P_\tau \leqslant P_\sigma$ prin simplificare se obţine $\left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s}\right)\left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s}\right) \leqslant \left(a_i^r + \frac{1}{a_{\sigma(i)}^s}\right)\left(a_j^r + \frac{1}{a_{\sigma(j)}^s}\right)$ de unde obţinem $(a_i^r - a_j^r)(a_{\sigma(j)}^s - a_{\sigma(i)}^s) \leqslant 0 \Rightarrow a_{\sigma(j)}^s > a_{\sigma(i)}^s \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$. Cum i şi j au fost aleşi arbitrari $\sigma = e$ (permutarea identică). **18.** şi **19.** Acelaşi raţionament ca în problema **17.** Se arată că: a) $\sigma =$ permutarea identică; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots n \\ n & n-1 & \ldots 1 \end{pmatrix}$. **20.** a) Pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma =$ permutarea identică. **21.** Vom dovedi că σ este permutarea identică. Prin absurd $\sigma \neq e$ $(\exists) 1 \leqslant i \leqslant n$, $\sigma(i) = j$ cu $j \neq i$. Notăm $\sigma(j) = k \Rightarrow k \neq j$. Fie $k = i$; presupunem $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow a_i a_j < a_j a_i$, contradicţie. Analog în cazul $j < i$ obţinem o contradicţie. Deci $k \neq i \Rightarrow k \notin \{i, j\}$. Notăm $\sigma(k) = l$. Se observă că $l \neq j$ şi $l \neq k$. Presupunem că $l = i$, dacă $i < j \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_j a_{\sigma(j)} \Rightarrow i < k \Rightarrow a_i a_{\sigma(i)} < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_i a_j < a_k a_l \Rightarrow a_i a_j < a_k a_i \Rightarrow j < k \Rightarrow a_j a_{\sigma(j)} < a_k a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_j a_k < a_k a_l \Rightarrow j < l \Rightarrow j < i$, contradicţie. Analog dacă $j < i$ ne duce la o contradicţie. Deci $l \neq i$ şi deci $l \notin \{i, j, k\}$. Dacă notăm $m = \sigma(l)$, ca mai sus se arată că $m \notin \{i, j, k, l\}$. Continuînd procedeul obţinem o infinitate de numere $\{i, j, k, l, m, \ldots\}$, contradicţie.

22. Sînt permutările de forma: a) există $1 \leqslant i, j \leqslant n$ cu $j > i + 1$ astfel încît $\sigma(i) = i + 1$, $\sigma(i + 1) = i$; $\sigma(j) = j + 2$, $\sigma(j + 1) = j$ şi $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; b) există un $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît $\sigma(i) = i + 1$, $\sigma(i + 1) = i + 2$, $\sigma(i + 2) = i$ şi $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri; c) există un $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît $\sigma(i) = i + 2$, $\sigma(i + 1) = i$, $\sigma(i + 2) = i + 1$ şi $\sigma(k) = k$ în toate celelalte cazuri. Numărul tuturor permutărilor cu 2 inversiuni este $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. **23.** Orice permutare $\sigma \in S_n$ este un produs de transpoziţii (i, j). Deci $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$. **24.** Se aplică acelaşi procedeu ca în problema 17.

Capitolul XV

MATRICE

1. $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 6 & 12 & 10 \\ 4 & 16 & 11 \end{pmatrix}$. **2.** $f(A) + f(B) = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$; $f(A + B) = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. **3.** $A^n = a^n I_2$, dacă $n = 4k$; $A^n = a^n A$, dacă $n = 4k + 1$; $A^n = -a^n I_2$, dacă $n = 4k + 2$; $A^n = -a^n A$, dacă $n = 4k + 3$. **4.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^n = 0$, dacă $n \geqslant 3$. **5.** $\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ a^{n-1}c + (n-1)a^{n-2} & a^{n-1}b & 0 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & n & na + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **7.** $A^n = A$, dacă n este impar şi $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-2x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dacă n este par. **8.** $A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$.

9. $A^n = (-a)^n \begin{pmatrix} (-1^n) + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & -(1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$. **10.** $A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & n & n\frac{b}{a} + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1}(a^n - 1) & 0 \\ 0 & \frac{b}{b-1}(b^n - 1) \end{pmatrix}$.

12. $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} \\ 0 & y\dfrac{1-y^n}{1-y} & 0 \\ x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} & 0 & x\dfrac{1-(2x)^n}{1-2x} \end{pmatrix}$. **13.** $x = 2;\ y = 3$ sau $x = 2,\ y = -3$. **14.** $u = 5;\ v = a,\ a \in \mathbf{C}$. **15.** $A^n = (2a)^{n-1}A$, deci $(2a)^{n-1} = 1$, de unde $a = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n-1} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n-1}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$ și deci $a = \frac{1}{2}$, dacă $n \in \mathbf{N}^*$ și in plus $a = -\frac{1}{2}$, dacă n este impar.

16. $A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **17.** $A = \pm\frac{\mathrm{i}\pm 1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sau $A = \pm\frac{\mathrm{i}\pm 1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

18. Luăm $b = a + r;\ c = a + 2r;\ d = a + 3r$ și, din ipoteză, rezultă $m - l = 2ar + r^2$, $p - m = 2ar + 3r^2$, $p - q = 2ar + 5r^2$ și se observă că $2(p - m) = m - l + p - q$. **19.** $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbf{C}\right\}$. **20.** Scăzînd și adunînd ecuațiile obținem matricele $X + Y$ și $X - Y$. Repetăm procedeul și obținem: $X = \begin{pmatrix} +1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & +1 \end{pmatrix}$. **21.** $a = -1$. **22.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **23.** Fie L_1, L_2, L_3, L_4 liniile matricei căutate $L_1 = (0, 6, 0)$, sau $L_1 = (1, 1, 0)$; $L_2 = (1, 0, 1)$, sau $L_2 = (0, 12, 0)$, sau $L_2 = (2, 2, 0)$; $L_3 = (0, 0, 1)$ sau $L_3 = (1, 2, 0)$; $L_4 = (0, 1, 1)$ sau $L_4 = (1, 3, 0)$. **24.** Relațiile se verifică prin calcul direct. **25.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Dacă $D = [A, B] = AB - BA$ și punem

$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, atunci $\alpha = bc' - b'c$, $\delta = b'c - bc'$ și deci $\alpha + \delta = 0$. Cum D verifică egalitatea $D^2 - (\alpha + \delta) + (\alpha\delta - \beta\gamma)I_2 = 0 \Rightarrow D^2 = (\beta\gamma - \alpha\delta)I_2 \Rightarrow [[A, B]^2, C] = [D^2, C] = [(\beta\gamma - \alpha\delta)I_2, C] = (\beta\gamma - \alpha\delta)C - (\beta\gamma - \alpha\delta)C = 0$. **26.** Notăm E_{ij} matricea de ordinul n care are la intersecția liniei i cu coloana j elementul 1 și în rest zero. Cum $AE_{ij} = E_{ij}A$, oricare $i, j = 1, 2, \ldots, n$, rezultă ușor că A este o matrice de forma $a \cdot I_n$. **27.** card $M = 2^{(m-1)(n-1)}$. **28.** Avem matricele $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$. Deci este suficient de verificat egalitatea cînd A_1, A_2, A_3, A_4 sînt matricele E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}. **29.** 3) $A = (a_{ij})1 \leqslant j \leqslant n$, $B = (b_{ij})1 \leqslant j \leqslant n$ atunci $T_r(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right)$ și $Tr\ (BA) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ji}\right)$ și deci $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. 4) rezultă din 3).

Capitolul XVI
DETERMINANȚI

1. a) minus; b) minus; c) minus d) plus. **2.** $i = 3$, $j = 5$. **3.** Nici unul. **4.** Coeficientul lui x^4 este -6, coeficientul lui x^3 este 1. **5.** $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{11}a_{22} \ldots a_{nn} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$. **6.** $\det A = \sum_{\sigma \in S_5} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)} \ldots a_{5\sigma(5)}$. Fiecare termen conține un factor care este egal cu zero, deci $\det A = 0$. **7)** a) Adunînd toate liniile la linia întîi, se obține la linia întîi numai elemente zero și deci determinantul este nul. b) Dăm factor comun pe a după prima coloană și b după coloana a doua. **8.** a) Cel puțin 2 linii au toate elemente egale cu același număr și deci determinantul este egal cu zero;

b) de exemplu determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix} \neq 0$ și are $n^2 - n + 1$ elemente egale. **9.** Determinantul are o linie (coloană) nulă și deci este nul. **10.** Se obține ecuația $(x - 1)(4x^2 + 4x + 5\alpha - 4\alpha^2) = 0$ care are 3 rădăcini reale. **11.** $-\cos^3 2x$. **12.** Se obține ecuația $x^3 - 4x^2 - 2x + 5 = 0$ care are o rădăcină $x = 1$. **13.** Determinantul din membrul stîng se poate scrie ca suma a doi determinanți. **14.** Avem $\sqrt{1 + \cos x} = 2 \sin \frac{x}{2}$, $\sqrt{1 + \sin x} = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$, $\sqrt{1 - \sin x} = -\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Adunăm la coloana a treia coloana a doua, dăm factor comun pe $2\sqrt{2}$; la colaona a doua adunăm coloana întîi înmulțită cu (-1), rezultă că coloana a doua este egală cu coloana a treia și deci determinantul este nul. **15.** $-4(a-b)(b-c)(c-a)$. **16.** Linia $n-1$ se scade din linia n; linia $n-2$ se scade din linia $n-1$; linia 1 se scade din linia 2. Se dezvoltă după linia întîi. **17.** Se înmulțește coloana 2 cu 10, coloana 3 cu 10^2 ș.a.m.d. coloana n cu 10^{n-1} și se adună toate elementele la coloana 1. **18.** Rădăcinile sînt $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$. **19.** Se scade linia p din linia $p+1$, linia $p-1$ din linia p ș.a.m.d., linia 1 din linia 2 și se dezvoltă după coloana 1; se obține un determinant de aceeași formă cu cel inițial în care p se înlocuiește cu $p-1$ (aici se folosesc identitățile $C_n^k - C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1}$). **20.** Se adună liniile $2, 3, \ldots, n$ la prima linie și se ține cont că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. **21.** $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. **22.** $A \cdot B = I_n \Rightarrow \det AB = \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow A, B$ inversabile și B este inversa lui $A \Rightarrow BA = I_n$. **23.** Se pornește de la definiția determinantului $\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \ldots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \bar{a}_{1\sigma(1)} \ldots \bar{a}_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det A}$. **24.** $\det(A^2 + B^2) = \det[(A + iB)(A - iB)] = \det(A + iB) \det(A - iB) = d \cdot \bar{d} \geqslant 0$, unde $d = \det(A + iB)$. **25.** I) Se verifică prin calcul; II) $A^k = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$. Din egalitatea I), $A^2 = (a+d)A \Rightarrow A^k = (a+d)^{k-1}A$. Dacă $A \neq 0 \Rightarrow (a+d)^{k-1} = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow A^2 = 0$. Dacă $A = 0 \Rightarrow A^2 = 0$. **27.** $\det N = k$. **28.** $\det A = n(-1)^{n-1}$. **29.** $\det A = 1$. **30.** $\det A = (-1)^{n-1} 2^{n-2}(n-1)$. **31.** a) Paritatea rezultă din faptul că toți termenii determinantului sînt numerele $+1$ și -1 și ei eventual se reduc doi cîte doi;

b) Valoarea maximă este 4, de exemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$ este 2, de exemplu pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Capitolul XVII

RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

1. a) 3; b) 4; c) 4; d) 4. **2.** a) Pentru $\alpha = -3$ sau $\alpha = 3$ rangul este 3, iar dacă $\alpha \neq -3$ și $\alpha \neq 3$ rangul este 4; b) 4; c) Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ și $\beta = 1$ rangul este 2, iar în rest rangul este 3; d) Pentru $\beta = 1$ sau $\beta = 5$ și $\alpha = 0$, rangul este 2, iar în rest rangul este 3. **3.** a) Rangul matricei ori nu se schimbă, ori

se schimbă cu o unitate; b) Rangul matricei se schimbă cu cel mult o unitate. Rangul matricei se schimbă cu cel mult k. **4.** Dacă $a \neq 0$, $A^* = aA^{-1}$. Dacă $a = 0$, pentru $n \geqslant 2$ toţi membrii egalităţilor sînt nuli. **5.** $AA^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$. $\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} A^t$. **6.** a) Pentru $\alpha \neq -8$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\dfrac{1}{\alpha + 8}\begin{pmatrix} 2\alpha + 4 & 6 & 4 - \alpha \\ -6 & 3 & 6 \\ 4 - \alpha & -6 & 2\alpha - 4 \end{pmatrix}$; b) Pentru $\alpha \neq 0$ matricea este inversabilă, inversa fiind $\dfrac{1}{8\alpha}\begin{pmatrix} 3\alpha & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & 3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; c) Nu; d) Da. Inversa este

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i & i \\ -i & 0 & i & -i \\ i & -i & 0 & i \\ i & i & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

7. a) Dacă $\alpha_i \neq 0$, pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, matricea este inversabilă, inversa fiind $\begin{pmatrix} 1/\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\alpha_n \end{pmatrix}$; b) Dacă $\alpha_i \neq 0$, pentru orice i, matricea este inversabilă, inversa fiind $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1/\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 1/\alpha_{n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) Da. Inversa este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; d) Da. Inversa este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1}\alpha^{n-1} & (-1)^{n-2}\alpha^{n-2} & (-1)^{n-3}\alpha^{n-3} & (-1)^{n-4}\alpha^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Avem $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = I - A^k = I$. **10.** Avem $I = I^t = (AA^{-1})^t = A^t(A^{-1})^t$. **11.** Nu, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Dacă A este nesingulară, atunci $AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow B = C$. **12.** a) $(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n = I_n$; b) $\left[\dfrac{1}{2}(A + I_n)\right]^2 =$

$= \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) = \frac{1}{2}(A + I_n)$. **13.** b) Avem $(I_n - E_n)\left(I_n - \frac{1}{n-1}E_n\right) =$ $= I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{1}{n-1}E_n^2 = I_n - E_n - \frac{1}{n-1}E_n + \frac{n}{n-1}E_n = I_n$. **14.** a) Rezultă direct din proporționalitatea oricăror linii ale unei matrice de rang 1. b) $A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}(c_1 c_2 \ldots c_n)$. **15.** Fie $A = XY$ ca la exercițiul precedent, componentele lui X fiind $x_1, x_2, \ldots x_n$, iar ale lui Y fiind $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Atunci $\alpha = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$. b) $(I_n + A)\left(I_n - \frac{1}{\alpha + 1}A\right) = \left(I_n - \frac{1}{\alpha+1}A\right)(I_n + A) = I_n + A - \frac{1}{\alpha+1}A^2 = I_n$. În particular, pentru $A = -E_n$ din problema **12**, obținem $A^2 = -nA$, deci $(I - E_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}E_n$. **16.** $A^{-1}B$ are rangul 1 și după problema 15 rezultă că $(I_n + A^{-1}B)^{-1} = I_n - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}B$, unde $\alpha = YA^{-1}X$. Înmulțind cu A^{-1} la dreapta relația de mai înainte, se obține $(I_n + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1}$, de unde $(A + B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1}$. Dacă efectuăm calculele în ordinea următoare: $A^{-1}X \to YA^{-1} \to \alpha = Y(A^{-1}X) \to \frac{1}{\alpha+1} \to \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}X \to \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha+1}A^{-1}X\right)(YA^{-1}) \to (A + B)^{-1}$, sînt necesare $3n^2 + 2n + 1$ înmulțiri și împărțiri. **17.** Dacă a_{ji}^* este elementul matricei A^{-1} de pe locul (j, i), c_i coloana a i-a, iar l_j linia a j-a a matricei A^{-1}, atunci se arată că $\bar{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{\alpha}{1 + \alpha a_{ji}^*}c_i l_j$. **18.** Fie A de ordin n și $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbf{C})$. Punem $f = A^{-1}e$ și $g = e'A^{-1}$. Atunci avem $\bar{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{a}{1 + as}fg$, unde s este suma elementelor matricei A^{-1}. **19.** a) $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) Nu are soluții; f) $X = (1\ 1\ 1)$; g) $X = (-3+11i\ \ 3+9i\ \ -1+7i)$; h) Rezultă

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -(n-2) & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

și folosind faptul că $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (problema 10) determinăm și inversa

matricei $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Se obține in final

$$X = I_n - \frac{n-1}{n^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Capitolul XVIII

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 91\alpha/19$, $x_3 = -39\alpha/19$; b) $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = 3\alpha$, $x_4 = 5\alpha$. **2.** a) Sistemul are soluții nenule pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$. Dacă $\lambda \neq 0$ și $\lambda \neq -1$, $x = -\alpha$, $y = z = 0$, $t = \alpha$; α fiind un număr oarecare. Dacă $\lambda = 0$, $x = \beta$, $y = -(\beta + \gamma)$, $z = 0$, $t = \gamma$; β, γ fiind numere oarecare. Dacă $\lambda = -1$, $x = u$, $y = 0$, $z = -(u + v)$, $t = v$, u, v fiind numere oarecare; b) Pentru $\lambda \neq 1$ și $\lambda \neq -2$, sistemul are soluții nenule. Pentru $\lambda = 1$, $x = -(\alpha + \beta)$, $y = \alpha$, $z = \beta$; α, β fiind numere oarecare. Pentru $\lambda = -2$, $x = y = z = \gamma$; γ fiind un număr oarecare; c) Sistemul are soluții nenule dacă $\lambda = \frac{2}{3}$. În acest caz, $x = 34\,\alpha$, $y = -18\alpha$, $z = 40\,\alpha$, $t = \alpha$; α fiind un număr oarecare. **3.** a) Sistemul este incompatibil; b) Sistemul este compatibil, soluțiile sale sînt: $x = \frac{5\alpha}{8}$, $y = \frac{4-\alpha}{2}$, $z = \frac{8-\alpha}{8}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$; c) Sistemul este compatibil nedeterminat: $x_1 = -2\lambda$, $y = \lambda + 1$, $z = \lambda$, λ fiind un număr oarecare; d) Sistemul este compatibil nedeterminat; $x = -\lambda + \frac{\mu}{2} + 1$, $y = \lambda$, $z = 9 - \frac{3}{2}\mu$, $t = \mu$, unde λ și μ sînt numere oarecare. **4.** Sistemul este compatibil $\Leftrightarrow 2a^2b^2 - 3a^2b + a^2 - b + 2 = 0$. **5.** a) Dacă

$\alpha \neq 1$ și $\beta \neq 0$, sistemul are soluție unică $x_1 = \frac{2\beta - 1}{\beta(\alpha - 1)}$, $x_2 = \frac{1}{\beta}$, $x_3 = \frac{2\alpha\beta - 4\beta + 1}{\beta(\alpha - 1)}$. Dacă $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, sistemul este compatibil, soluția fiind $x_1 = 2 - \lambda$, $x_2 = 2$, $x_3 = \lambda$, λ fiind număr arbitrar. Dacă $\alpha = 1$, $\beta \neq \frac{1}{2}$ sistemul este incompatibil. Dacă $\beta = 0$ sistemul este incompatibil; b) Dacă $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 1$ și $\alpha \neq -2$; sistemul are soluție unică; $x_1 = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$, $x_2 = \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{\beta(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$; $x_3 = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}$. Dacă $\alpha = \beta = 1$, sistemul este compatibil: $x_1 = 1 - \lambda - \mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$; λ, μ fiind numere arbitrare. Dacă $\alpha = \beta = -2$, sistemul este compatibil: $x_1 = \gamma$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 + \gamma)$, $x_3 = \gamma$, γ fiind un număr arbitrar. În rest, sistemul este incompatibil; c) Dacă $\alpha \neq 1$ și $\alpha \neq -22$, sistemul are soluția unică: $x_1 = -\frac{7\beta}{\alpha + 22}$, $x_2 = \frac{(\alpha + 8)\beta}{\alpha + 22}$, $x_3 = \frac{(\alpha + 1)\beta}{\alpha + 22}$, $x_4 = \frac{(\alpha + 1)\beta}{\alpha + 22}$. Dacă $\alpha = 1$, sistemul este compatibil, soluția fiind: $x_1 = \beta - 2u - 3v - 3w$, $x_2 = u$, $x_3 = v$, $x_4 = w$, unde u, v, w sînt numere arbitrare. Dacă $\alpha = -22$ și $\beta \neq 0$ sistem incompatibil, iar dacă $\alpha = -22$ și $\beta = 0$ sistemul este compatibil. **6.** În ambele cazuri o condiție necesară și suficientă este ca sistemul să fie omogen. **7.** O condiție necesară și suficientă este ca suma coeficienților combinației liniare date să fie egală cu 1. **8.** a) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$;

b) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$. **9.** Condiții analoage celor din problema precedentă. **10.** Cel puțin două dintre numerele a, b, c, d, e sînt egale cu -1; dacă nici unul nu este egal cu -1, atunci $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} + \frac{e}{e+1} = 1$. **11.** $\alpha = be + cf + ad = 0$. **12.** a) Dacă $m \neq 1$, $m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sistemul are soluția unică: $x = \frac{(4m - 3)(2m - 1)}{2(m - 1)(m^2 + m - 1)}$, $y = \frac{4m - 3}{2(m^2 + m - 1)}$, $z = \frac{6m^2 - 12m + 5}{2(m - 1)(m^2 + m - 1)}$; b) $m \in \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$. **13.** Avem $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)x = 0$. Se observă că ecuația $(\lambda I_n - A)x = 0$ are soluții nenule $\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ este rădăcină a polinomului $P(X)$. **14.** a) $\lambda_1 = -ai$, $\lambda_2 = ai$. Vectorii proprii pentru $\lambda_1 =$

$= -ai$ sînt de forma $(\alpha, i\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda_2 = ai$ nu are vectori proprii. b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$ sînt: $(-7\alpha + 6\beta; 5\alpha - 3\beta; -6\alpha + 3\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Pentru $\lambda = 6$, vectorii proprii sînt $(\alpha; \alpha; -3\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$; c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 3$ sînt de forma $(0; \alpha; -\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; pentru $\lambda = 6$ sînt de forma $(3\alpha; 4\alpha; -2\alpha)^t$, $\alpha \neq 0$; d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 0$ sînt de forma $(2\alpha + 3\beta; -\alpha; 0; -\beta)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Vectorii proprii pentru $\lambda = 2$ sînt de forma $(\alpha; -\alpha; \beta; \alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$; e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 3$. Vectorii proprii sînt de forma $(\alpha; 0; \beta; -\alpha)^t$, unde $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. **15.** $P_A(X) = \det(XI_n - A) = (-1)^n \det(A - XI_n) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Fie $f(X) = a_0 \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt rădăcinile polinomului. Rezultă $f(A) = a_0 \prod_{i=1}^{k}(A - x_i I_n)$ și deci $\det(f(A)) = a_0(-1)^{nk}\prod_{j=1}^{n} f(x_j) = (-1)^k a_0^n \prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{n}(x_j - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$. **16.** a) Avem $P_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n)$, iar $P_{A^{-1}}(X) = (-1)^n \det(A^{-1} - XI_n)$. Dacă λ este o valoare proprie a lui A și cum A este inversabilă rezultă imediat că $\lambda \neq 0$. Mai mult, se arată că rădăcinile lui $P_{A^{-1}}(X)$ sînt inversele rădăcinilor polinomului $P_A(X)$; b) Fie $P_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, atunci $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$ și $P_A(-\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda + \lambda_i)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{C}$. De aici rezultă $P_A(\lambda)P_A(-\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2 - \lambda_i^2)$, oricare $\lambda \in \mathbf{C}$. Dar $A^2 - \lambda^2 I_n = (A - \lambda I_n)(A + \lambda I_n)$ și deci $P_{A^2}(\lambda^2) = (-1)^n P_A(\lambda) P_A(-\lambda)$, oricare $\lambda \in \mathbf{C}$. Așadar, $P_{A^2}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2 - \lambda_i^2)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{C}$, de unde $P_{A^2}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^2)$. Deci, valorile proprii ale matricei A^2 sînt $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$; c) Analog cu raționamentul de la punctul precedent. Se folosește identitatea $A^k - \lambda^k I_n = \prod_{i=1}^{k}(A - X\varepsilon_i I_n)$, unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ sînt rădăcinile de ordinul k ale unității. Rezultă că valorile proprii ale lui A^k sînt $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$; d) Fie $f(X) = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k$. Se poate aplica exercițiul 15; rezultă că valorile proprii ale lui $f(A)$ sînt $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt valorile proprii ale lui A. **17.** c) Fie x vectorul propriu al matricei A corespunzător valorii proprii λ. Se arată ușor că, dacă $f(X) = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k$, avem $f(A)x = f(\lambda)x$, adică x este vectorul propriu al matricei $f(A)$ care corespunde valorii proprii $f(\lambda)$.

LEGI DE COMPOZIȚIE. GRUPURI

1. Elementul neutru $e = 0$. Elementele $x \neq 1$ sînt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x}{x-1}$. **2.** Elementul neutru $e = -1$. Elementele $x \neq 1$ sînt simetrizabile; simetricul lui x este $x' = \frac{x+3}{x-1}$. **3.** a) Nu este comutativă, nu este asociativă, nu are element neutru; b) $a_2 = 3a$; $a_3 = 7a$. În continuare se arată prin inducție. **4.** a) Este comutativă, asociativă elementul neutru este zero; 0 este singurul element simetrizabil; b) se arată prin calcul; c) $x = \sqrt{5}$. **5.** Este comutativă, asociativă, 0 este elementul neutru, orice element este simetrizabil. **6.** Se observă că $x \top y = \max\{x, y\}$. „T" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru; 0 este singurul element simetrizabil. **7.** Se arată mai întîi că $x, y \in A \Rightarrow x \circ y \in A$. I) Se arată prin calcul; II) $\frac{x+z}{1+\frac{xz}{a^2}} = \frac{y+z}{1+\frac{yz}{a^2}} \Rightarrow (x-y)\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) = 0$. Cum $z \neq a \Rightarrow$ $\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

8. a)

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

b) Nu este comutativă, nu este asociativă (de exemplu $(4 * 2) * 3 \neq 4 * (2 * 3)$; nu are element neutru.

9. a) $ax = b \Rightarrow$ are soluția $x = ab$; dacă $ax = ay = b \Rightarrow ab = x$ și $ab = y \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$; b) Fie $a \in A$ și $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Funcția $\sigma_a : A \to A$, $\sigma_a(x) = ax$ este bijectivă și $\sigma_a(a) = a$. În plus, dacă $\sigma_a(x) = y \Rightarrow \sigma_a(y) = x$. Din ipoteză rezultă că $x \neq a \Rightarrow \sigma_a(x) \neq x$. Mulțimea $A - \{a\}$ se împarte în perechi disjuncte $\Rightarrow A - \{a\}$ are un număr par de elemente $\Rightarrow A$ are un număr impar de elemente. **10.** „*" este comutativă și asociativă $\Leftrightarrow a = b = 0$ și $c \in \mathbf{R}$ sau $a = b = 1$ și $c \in \mathbf{R}$. **11.** a) $x * (y * z) = (x * y) * z \Leftrightarrow axz + cz + a^2x + ac +$ $+ bz = bxz + cx + ax + b^2z + bc \Leftrightarrow a = b$, $b + c = b^2$, $c + a = a^2$, $ac = bc \Leftrightarrow a = b = \lambda$, $c = \lambda^2 - \lambda$ cu $\lambda \in \mathbf{R}$; b) Dacă $e \in \mathbf{R}$ este element neutru $\Rightarrow xe + ax + be + c = x$ $(\forall) x \in \mathbf{R}$ și $ex + ae + bx + c = x \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 1 - e$, $b = 1 - e$ și $c = e(e-1)$. Dacă notăm $\lambda = 1 - e \Rightarrow a =$ $= b = \lambda$ și $c = \lambda^2 - \lambda \Rightarrow$ legea este asociativă. Invers, dacă legea este asociativă, din a) rezultă că elementul neutru $e = 1 - \lambda$; c) Dacă $e \in \mathbf{R}$ este element neutru atunci $e - 1$ nu este simetrizabil. **12.** „$\perp$" și „$\top$" sînt comutative, asociative și au element neutru (0, respectiv 1). Pentru a arăta ultimele 2 egalități se scrie: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$, $c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_r^{\gamma_r}$, unde p_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sînt numere prime și $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\gamma_i \geqslant 0$. În continuare se ține cont că $m \perp n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ și $m \top n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$. **13.** „$\top$"

și „⊥" sînt comutative și asociative, nu au element neutru. **14.** a) Legea „*" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru; fiecare $x \in \mathbf{R}$ are simetricul $-x$. Legea „$\circ$" este comutativă, asociativă, -1 este element neutru, orice element este simetrizabil (simetricul lui x este $x' = -x - 2$); b) Soluțiile sistemului sînt $(0, -1)$, $(-1, 0)$. **16.** Sînt n^{n^2} legi de compoziție dintre care $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sînt comutative și $n^{(n-1)^2+1}$ au element neutru. **17.** În $(\mathbf{C}^*, \top)$ elementul neutru este $-i$, dacă $z \in \mathbf{C}^* \Rightarrow -\frac{1}{z}$ este inversul lui z. **18.** Se arată că $x \neq 1$ și $y \neq 1 \Rightarrow x * y \neq 1$. Se arată prin calcul că „*" este asociativă, comutativă. Elementul neutru este -1. Dacă $x \in R_1$, $x' = \frac{2 + x}{x - 1}$ este inversul lui x (Se vede că $x' \in R_1$). **19.** Operația „$\circ$" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru. Dacă $z \in C_1 \Rightarrow z' = \frac{z}{1 - z}$ este inversul său. Se vede că $z' \in C_1$, $i \circ i \circ i \circ i \circ i = 5 - 4i$, $i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i \circ i = -(7 + 8i)$. **20.** Legea „⊥" este comutativă, asociativă, e este elementul neutru. Dacă $x \in \mathbf{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$ este inversul lui x. Se observă că $x' \in A$. **21.** Legea „$\circ$" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru. Dacă $x \in R_1 \Rightarrow x' = \frac{x}{1 - x}$ este inversul lui x. Se vede că $x' \in R_1$. **22.** Legea „*" este comutativă, asociativă, 1 este element neutru. Dacă $x \in R_2 \Rightarrow x' = \frac{3 - 2x}{2 - x}$ este inversul lui x. Se verifică că $x' \in R_2$. **23.** Legea „$\circ$" este comutativă, asociativă, 0 este element neutru. Dacă $x \in Q_2 \Rightarrow x' = \frac{2x}{x - 2}$ este inversul lui x. Se verifică că $x' \in Q_2$. **24.** Fie $x, y \in H \Rightarrow x = a + b\sqrt{2}$, $y = d + c\sqrt{2}$. Dacă H este parte stabilă atunci $xy \in H$. Cum $xy = (ad + 2bc) + (ac + bd)\sqrt{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow (ad + 2bc)^2 - k(ac + bd)^2 = 1$. Cum $a^2 - kb^2 = 1$ și $c^2 - kd^2 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 2$. **25.** Elementul neutru este matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversul elementului $\begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -2y & x - 4y \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} x - 4y & -2y \\ 2y & x + 4y \end{pmatrix}$. **26.** Se verifică prin calcul că produsul a 2 elemente din G se găsește în G. Operația din G este asociativă deoarece este înmulțirea matricelor care este asociativă. Fiecare element din G este inversabil. **27.** Considerăm grupul G din exercițiul 26. Dacă $A \in G$, se arată prin calcul: A^2 este matricea unitate $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau matricea $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(\forall)$ $A \in G$. Deci, dacă $A, B \in G \Rightarrow A^2B^2 = B^2A^2$. Deci există

grupuri necomutative avînd proprietatea $x^2y^2 = y^2x^2$. **28.** Din $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow ab = ba^{-1} \Rightarrow a^2b^2 = aba^{-1}b$. Ținînd cont că $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow a^{-1}b = b^{-1}a^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2b^2 = abb^{-1}a^{-1} = e$. Din $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow ba = ab^{-1} \Rightarrow b^2a^2 = bab^{-1}a$. Cum $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow b^{-1}a = a^{-1}b^{-1}$ și deci $b^2a^2 = ba\ a^{-1}b^{-1} = e$. Cum $a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow b = a^{-1}b^{-1}a = b^{-1}abb^{-1}a = b^{-1}a^2 \Rightarrow b^2 = a^2$. Din $a^2b^2 = e$ și $a^2 = b^2 \Rightarrow a^4 = b^4 = e$. **29.** $(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = a(ab)b \Rightarrow ba = ab$. Există grupuri necomutative cu proprietatea $(a * b)^3 = a^2 * b^3$ (a se vedea problema **37,** cap. XX). **30.** a) Operațiile „$\top$" și „$\perp$" sînt comutative, asociative, au element neutru: $(0, 1)$ este element neutru pentru prima, și $(1, 0)$ pentru a doua; b) Elementele simetrizabile față de legea „$\top$" sînt de forma (a, b) cu $a \in \mathbf{Z}$ și $b \in \mathbf{Q} - \{0\}$; elementele simetrizabile față de legea „$\perp$" sînt de forma (a, b) cu $a \in \{-1, 1\}$ și $b \in \mathbf{Q}$; c) Legea „$\perp$" nu este distributivă față de $\top$. **31.** Legea $*$ este comutativă, asociativă, dar nu are element neutru. **32.** Funcția $f: \mathbf{Z} \to M$, $f(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un izomorfism. **33.** Avem $S_3 = \{e, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_1, \sigma_2\}$ unde e este permutarea identică; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ sînt transpozițiile: (12), (13), (23), iar $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Definim funcția $f: S_3 \to G$ în felul următor: $f(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\tau_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(\tau_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$f(\tau_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se arată că f este un izomorfism de grupuri. **34.** a) Se arată că $A^{5k} = I_5$, $A^{5k+1} = A$, $A^{5k+2} = A^2$, $A^{5k+3} = A^3$, $A^{5k+4} = A^4$ $(\forall)\ k \in \mathbf{N}$; b) Inversa lui A este A^4; c) Se definește $f: G \to H$; $f(A^k) = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ $(\forall) k, 1 \leqslant k \leqslant 5$; f este un izomorfism de grupuri. **35.** În grupul $(\mathbf{R}\ *)$, 0 este element neutru, inversul lui x față de operația „$*$" este $-x$. **36.** Definim $f: G_1 \to G_2$ astfel: $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i$, $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$, $f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i$ este un izomorfism de grupuri. Definim $g: G_2 \to G_3$, astfel: $g(1)$ = permutarea identică, $g(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $g(i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ este un izomorfism de grupuri. **37.** Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbf{Z}, +) \to (\mathbf{Q}, +)$. Dacă notăm $f(1) = a \in \mathbf{Q}$ atunci rezultă că $f(n) = na$ $(\forall)\ n \in \mathbf{Z}$. Deci $\mathbf{Q} = \{na \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Cum $f(1) \neq 0 \Rightarrow a = \frac{p}{q}$ cu $p \neq 0$ și

$(p, q) = 1$. Putem presupune $q > 0$. Atunci $\frac{1}{q+1} = ma = m\frac{p}{q} \Rightarrow q =$ $= (q+1)mp \Rightarrow q+1 \mid q$, contradicţie. **38.** Presupunem că există un izomorfism $f: (\mathbf{Q}, +) \to (\mathbf{R}, +)$. Fie $\sqrt{2}, 1 \in \mathbf{R}$. Există $a, b \in \mathbf{Q}$, astfel încît $\sqrt{2} =$ $= f(a)$ şi $1 = f(b)$. Cum $a \neq 0$ şi $b \neq 0$ există $m, n \in \mathbf{Z}$, nenule astfel încît $ma = nb$. Atunci $f(ma) = f(nb) \Rightarrow mf(a) = nf(b) \Rightarrow m\sqrt{2} = n \cdot 1 \Rightarrow \sqrt{6} =$ $= \frac{n}{m} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **39.** Presupunem că există un izomorfism $f: \mathbf{Q}^* \to \mathbf{R}^*$. Fie $f(2) = a$, $a \neq 0$. Există $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ cu $b^3 = a$. Cum f este surjectivă, există $x \in \mathbf{Q}^*$ astfel încît $b = f(x) \Rightarrow b^3 = f(x^3) \Rightarrow f(x^3) =$ $= f(2) \Rightarrow x^3 = 2$. Deci $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q}$, contradicţie. **40.** Dacă G este grup, ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţiile $x = a^{-1}b$, respectiv $y = ba^{-1}$. Invers, cum ecuaţiile $ax = a$ şi $xa = a$ au soluţii $\Rightarrow$ există element neutru e. Ecuaţiile $ax = e$ şi $ya = e$ avînd soluţii $\Rightarrow$ există invers pentru orice $a \in G$. **42.** şi **43.** Se verifică prin calcul. **44.** b) Fie $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de grupuri. Notăm $f(1) = n_0$. Se arată că $f = \varphi_{n_0}$; c) Cele două izomorfisme sînt $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) =$ $= x\ (\forall)x \in \mathbf{Z}$ şi $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $g(x) = -x\ (\forall)x \in \mathbf{Z}$. **45.** Dacă $f: \mathbf{Z} \to G$ este un omomorfism şi punem $f(1) = g$ atunci $f(n) = ng = \underbrace{g + g + \ldots + g}_{n \text{ ori}}$. Deci f este perfect determinat de valoarea $f(1)$. Rezultă de aici că φ este o bijecţie. **46.** a) Se verifică prin calcul; b) Fie $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ un omomorfism de grupuri. Notăm $q = f(1)$. Dacă $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(n) = nq$. Dacă $x = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow m = nx \Rightarrow$ $\Rightarrow f(m) = f(nx) \Rightarrow nq = nf(x) \Rightarrow f(n) = \frac{m}{n}q \Rightarrow f(n) = xq \Rightarrow f = \psi_q$. **47.** Fie $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de grupuri, nenul. Există $x \in \mathbf{Q}$ astfel încît $f(x) = a \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$. Fie $n > 0$ un număr natural; există $y \in \mathbf{Q}$ astfel încît $ny = x \Rightarrow f(ny) = f(x) \Rightarrow nf(y) = f(x) = a \Rightarrow n \mid a$. Cum n este arbitrar $\Rightarrow a = 0$, contradicţie. **48.** Fie $f: \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}$ un omomrfism şi $x = \hat{k} \in$ $\in \mathbf{Z}_n$. Cum $nx = \widehat{nk} = \hat{0} \Rightarrow f(nx) = f(\hat{0}) = 0 \Rightarrow nf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f = 0$. **49.** a) $mf(\hat{1}) = f(m\hat{1}) = f(\hat{m}) = f(\hat{0}) = \bar{0}$; b) fie $f, g \in A$ astfel încît $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow f(\hat{1}) = g(\hat{1})$. Dacă $x = \hat{a} \in \mathbf{Z}_m$ este un element oarecare cu $0 \leqslant a \leqslant m-1 \Rightarrow x = a \cdot \hat{1} \Rightarrow f(x) = f(a \cdot \hat{1}) = af(\hat{1}) = ag(\hat{1}) =$ $= g(a \cdot \hat{1}) = g(x) \Rightarrow f = g \Rightarrow \varphi$ injectivă. Fie $y = \bar{a} \in B \Rightarrow m\bar{a} = \bar{0}$. Dacă $x = \hat{n} \in \mathbf{Z}_m$, atunci definim $f: \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$, $f(x) = \overline{na}$. f este un omomorfism de grupuri şi $\varphi(f) = f(\hat{1}) = \bar{a} \Rightarrow \varphi$ este surjectivă; c) card $A =$ card B.

50. Ordinul lui A_n este $\frac{n!}{2}$. **51.** Fie $H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi $x \in H \Rightarrow H = \{xx_1, xx_2, ..., xx_n\} \Rightarrow x = xx_k \Rightarrow x_k = e$ (elementul neutru) $\Rightarrow e \in H \Rightarrow$ există un x_l cu $xx_l = e \Rightarrow x^{-1} = x_l \Rightarrow x^{-1} \in H \Rightarrow H$ subgrup. **52.** Se verifică prin calcul. **53.** Dacă $H \not\subset K$ şi $K \not\subset H \Rightarrow (\exists)x \in H$, $x \notin K$ şi $(\exists)y \in K$, $y \notin H$. Dar cum $x, y \in H \cup K \Rightarrow xy \in H \cup K \Rightarrow xy \in H$ sau $xy \in K$. În primul caz obţinem că $y = x^{-1}(xy) \in H$, contradicţie. În al doilea caz $x = (xy)y^{-1} \in K$, contradicţie. **54.** Se verifică prin calcul. **55.** Dacă $xy = z \in Z(G) \Rightarrow y = x^{-1}z \Rightarrow yx = (x^{-1}z)x = x^{-1}(zx) = x^{-1}(xz) = (x^{-1}x)z = z \Rightarrow yx = xy$. **56.** A se vedea problema **27**, cap. III. **57.** Fie $\sigma \in Z(A_n)$ şi presupunem că $\sigma \neq e \Rightarrow$ există $a \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel incit $\sigma(a) = b$ cu $b \neq a$. Cum $n \geqslant 4$, există c, d astfel incit a, b, c, d sint distincte. Definim permutarea θ astfel: $\theta(a) = a$, $\theta(b) = c$, $\theta(c) = d$, $\theta(d) = b$ şi $\theta(x) = x\ (\forall)x \notin \{a, b, c, d\}$. Este clar că $\theta \circ \theta \in A_n$ şi deci $\sigma \circ (\theta \circ \theta) = (\theta \circ \theta) \circ \sigma \Rightarrow \sigma(\theta(\theta(a))) = \theta(\theta(\sigma(a))) \Rightarrow b = d$, contradicţie. Deci $Z(A_n) = \{e\}$. **58.** b) Fie $H \subset (\mathbf{Z}, +)$ un subgrup. Dacă $H = \{0\} \Rightarrow H = 0 \cdot \mathbf{Z}$. Dacă $H \neq \{0\} \Rightarrow (\exists)a \in H$, $a \neq 0$. Dacă $a < 0 \Rightarrow -a \in H$ şi $-a > 0$. Deci putem presupune că H conţine un număr strict pozitiv. Fie n_0 cel mai mic număr strict pozitiv care aparţine lui H. Avem clar că $n_0 \cdot \mathbf{Z} \subset H$. Fie $x \in H \Rightarrow (\exists)q, r \in \mathbf{Z}$ cu $x = n_0q + r$ unde $0 \leqslant r < n_0$. Avem $r = x - n_0q \in H$. Dacă $r \neq 0$, contrazicem alegerea lui n_0. Deci $r = 0 \Rightarrow x = n_0q \Rightarrow H \subset n_0\mathbf{Z} \Rightarrow H = n_0\mathbf{Z}$. **59.** Se arată prin calcul direct, ţinîndu-se cont de definiţia c.m.m.d.c. şi a c.m.m.m.c. a 2 numere. **60.** I) Fie $x \in aH \cap bH \Rightarrow x = ah$, $h \in H$ şi $x = bh'$ cu $h' \in H \Rightarrow ah = bh' \Rightarrow b^{-1}a = h'h^{-1} = h_1 \in H$. Fie $z \in aH \Rightarrow z = ak$, $k \in H$. Cum $b^{-1}a = h_1 \Rightarrow a = bh_1 \Rightarrow z = ak = b(h_1k) \Rightarrow z \in bH \Rightarrow aH \subset bH$. Analog se arată că $bH \subset aH$; II) Se arată că funcţia $\varphi: H \to aH$, $\varphi(h) = ah$, este o bijecţie. **61.** Din mulţimea de submulţimi de forma $\{aH\}_{a \in G}$ alegem pe cele distincte. Fie acestea $a_1H, a_2H, ..., a_rH$. Avem clar că $G = \bigcup_{i=1}^{r} a_iH$ şi $a_iH \cap a_jH = \emptyset$ pentru $i \neq j$. Deci ord G = card $G = \sum_{i=1}^{r}$ card $a_iH = r \cdot$ card $H = r \cdot$ ord $H \Rightarrow$ ord $H \mid$ ord G. **62.** I) Fie mulţimea $\{e, a, a^2, ..., a^n, ...\}$. Cum G este finit, există k, j cu $k < j$ astfel încît $a^k = a^j$. Rezultă că $a^{j-k} = e$; II) Fie ord$(a) = n$; scriem $m = nq + r$ cu $0 \leqslant r < n$. Deci $e = a^m = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = a^r \Rightarrow a^r = e$, ceea ce contrazice alegerea lui n; III) Se arată prin calcul direct; IV) Se aplică teorema lui Lagrange. **63.** ord $\widehat{25} = 24$; ord $\widehat{30} = 4$, ord $\widehat{55} = 24$, ord $\widehat{45} = 8$, ord $\widehat{80} = 3$. **64.** a) $(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \Rightarrow xy = y^{-1}x^{-1}$. Cum $x^2 = e \Rightarrow x = x^{-1}$ şi deci $xy = yx$; b) Există grupuri necomutative cu proprietatea din enunţ

(a se vedea problema **37.**, cap. XX). **65.** Notăm $A = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ şi $B = \{x \in G \mid x^2 \neq e\}$. Avem $G = A \cup B$ şi $A \cap B = \varnothing$. Dacă $B = \varnothing \Rightarrow$ $\Rightarrow G = A \Rightarrow A$ conţine cel puţin 2 elemente $\Rightarrow$ există $x \neq e$ cu $x^2 = e$. Dacă $B \neq \varnothing$, fie $x \in B$. Atunci $x^{-1} \in B$ şi $x \neq x^{-1}$. Deci B conţine cel puţin 2 elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}\} \Rightarrow$ există $y \in B$ cu $y \notin \{x, x^{-1}\}$. Se arată uşor că $y^{-1} \notin \{x, x^{-1}\}$ şi $y \neq y^{-1}$. Deci B conţine 4 elemente. Dacă $B \neq \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ se continuă procedeul. După un număr finit de paşi obţinem că B conţine un număr par de elemente. Deci A are un număr par de elemente şi deci există $x \in G$ cu $x \neq e$ şi $x^2 = e$. **66.** Dacă $x \in G$ şi $x^2 \neq e \Rightarrow (x^{-1})^2 \neq e$ şi deci în produsul $\prod\limits_{x \in G} x$ se simplifică 2 cîte 2 elementele $x \in G$ pentru care $x^2 \neq e$. Deci $\prod\limits_{x \in G} x = \prod\limits_{\substack{y \in G \\ y^2 = e}} y$. **67.** Considerăm grupul $G = \mathbf{Z}_p - \{0\}$ cu operaţia de înmulţire. În acest grup singurul element de ordinul 2 este $-\hat{1}$. Deci $\prod\limits_{x \in G} x = -\hat{1} \Rightarrow \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} = -\hat{1} \Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. **68.** Se consideră grupul $G = \mathbf{Z}_p - \{0\}$ cu operaţia de înmulţire. **69.** Clar $(ab)^{mn} = e$. Presupunem $(\exists)\, k$, $0 < k < mn$, cu $(ab)^k = e \Rightarrow a^k b^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \Rightarrow (a^k)^n = (b^{-k})^n = (b^n)^{-k} = e \Rightarrow a^{kn} = e \Rightarrow m \mid kn \Rightarrow m \mid k$ (deoarece $(m, n) = 1$). Analog se arată că $n \mid k$. Deci $mn \mid k \Rightarrow mn \leqslant k$, contradicţie. **70.** Prin calcul se arată că $(\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n, +)$ este grup comutativ. Fie $\varphi\colon \mathbf{Z}_{mn} \to \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$, $\varphi(\dot{x}) = (\bar{x}, \hat{x})$ (am notat cu $\dot{x}$, clasa lui x în $\mathbf{Z}_{mn}$. Se arată că φ este omomorfism de grupuri. Dacă $\varphi(\dot{x}) = \varphi(\dot{y}) \Rightarrow (\bar{x}, \hat{x}) = (\bar{y}, \hat{y}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ şi $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow m \mid x - y$ şi $n \mid x - y$. Deci $mn \mid x - y$ adică $\dot{x} = \dot{y} \Rightarrow \varphi$ este injectivă. Cum $\mathbf{Z}_{mn}$ şi $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n'$ au acelaşi număr de elemente, φ este şi surjectiv. Deci φ este un izomorfism. **71.** Fie $a \in G$, $a \in e$. Din teorema lui Lagrange obţinem că $\mathrm{ord}(a) \mid \mathrm{ord}\, G \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{ord}\,(a) \mid p \Rightarrow p = \mathrm{ord}\,(a) \Rightarrow G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$. Definim $\varphi : \mathbf{Z}_p \to G$, $\varphi(\hat{k}) = a^k$ unde $0 \leqslant k \leqslant p - 1$. Se arată că φ este un izomorfism. **72.** Dacă $n = \mathrm{ord}(xy) \Rightarrow (xy)^n = e \Rightarrow e = \underbrace{xy \cdot xy \cdot \ldots \cdot xy}_{n \text{ ori}} \Rightarrow e = x(yx)^{n-1}y \Rightarrow (yx)^{n-1} = x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1} \Rightarrow (yx)^n = e \Rightarrow \mathrm{ord}\,(yx) \leqslant n$. Invers, se arată că dacă $m = \mathrm{ord}\,(xy)$, atunci $\mathrm{ord}\,(xy) \leqslant m$. Deci $\mathrm{ord}\,(xy) = \mathrm{ord}\,(yx)$. **73.** I) Se verifică prin calcul. II) Fie $a \in G$. Dacă $\mathrm{ord}\,(a) = 4 \Rightarrow \langle a \rangle = G \Rightarrow G = \{e, a, a^2, a^3\}$. Se vede uşor că G este izomorf în acest caz cu $(Z_4, +)$. Presupunem că $(\forall)\, a \in G$, $\mathrm{ord}\,(a) < 4$. Cum $\mathrm{ord}\,(a) \mid 4$, atunci $\mathrm{ord}\,(a) \leqslant 2$. Dacă $G = \{e, a, b, c\}$ deci $a^2 = b^2 = c^2 = e$. De aici rezultă uşor că $ab = ba = c$, $ac = ca = b$, $bc = cb = a$ şi deci G este izomorf cu grupul lui Klein, în acest caz.

INELE ŞI CORPURI

1. Se verifică cu uşurinţă axiomele inelului. Elementul unitate este (1, 0) **2** Fie $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, descompunerea în factori primi a lui n, astfel încît $k_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq r)$ şi $(p_i, p_j) = 1$, pentru $i \neq j$. Avem că $\hat{x} \in N \Leftrightarrow p_i \mid x$, oricare ar fi i, $1 \leq i \leq r$. Fie acum, $\hat{x}^k = 0$ şi $\hat{x}^m = \hat{x}$. Atunci $\hat{x}^{m_i} = \hat{x}$, pentru oricare $i \geq 1$. Dacă luăm $m^l \geq k$, atunci $\hat{x}^{m^l} = \hat{0}$ şi deci $\hat{x} = \hat{0}$. **3.** M este elementul unitate. Dacă M este formată dintr-un element, $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este un corp cu două elemente. Dacă $M = \{a, b\}$ are două elemente, atunci inelul $\mathcal{P}(M)$ este $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, M\}$, unde $0 = \emptyset$ şi $1 = M$. Operaţiile sînt definite prin tabelele:

+	0	{a}	{b}	1
0	0	{a}	{b}	1
{a}	{a}	0	1	{b}
{b}	{b}	1	0	{a}
1	1	{b}	{a}	0

·	0	{a}	{b}	1
0	0	0	0	0
{a}	0	{a}	0	{a}
{b}	0	0	{b}	{b}
1	0	{a}	{b}	1

Dacă M are 3 elemente, inelul $\mathcal{P}(M)$ are 8 elemente. Tabelele adunării şi înmulţirii se fac analog celor precedente. **4.** Dacă $b \in M$, atunci $f(b)a = (ab + b_0 - 1)a = (ab)a + b_0a - a = 1$; deci $f(b) \in M$. Dacă $f(b) = f(b')$, atunci $ab + b_0 - 1 = ab' + b_0 - 1$, de unde $ab = ab'$. Înmulţind această inegalitate la stînga, cu a' obţinem $b = b'$ şi deci f este injectivă. Funcţia f nu este injectivă, căci de exemplu $b_0 \notin f(M)$. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că $b_0 = f(b)$, $b \in M$; atunci $ab + b_0 - 1 = b_0$, adică $ab = 1$, contradicţie. **5.** Fie un element $a \in A$, $a \neq 0$ şi $b \in A$ cu $ba = 1$. Avem că $b \neq 0$ şi fie $b' \in A$ cu $b'b = 1$. Atunci $(b'b)a = a$, adică $b' = a$. Deci $ab = ba = 1$, adică a este inversabil. **6.** Fie $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)$. La fel $g(1) = g(n) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$. Cum $f(1) = g(1)$ şi $f(n) = g(n)$ obţinem $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$. De aici rezultă că $f\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\frac{m}{n}\right)$ $(\forall)$ $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$. **7.** Dacă $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ este inversabil, există $\hat{b} \in \mathbf{Z}$ cu $\hat{a}\hat{b} = \hat{1}$. Deci $ab \equiv 1 \pmod{n}$, adică există $k \in \mathbf{Z}$ cu $ab - 1 = kn$, sau $ab + (-k)n = 1$. Această relaţie spune că $(a, n) = 1$. Reciproc este clar deoarece toate implicaţiile de mai sus sînt echivalenţe. **8.** Elementul neutru al legii $\perp$ este 0. Dacă $y \in A$ este inversul lui $1 - x$ în inelul A, atunci $1 - y$ este simetricul lui x faţă de legea $\perp$. **9.** Dacă se consideră $A = \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ şi matricele $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $(x * y) * z \neq x * (y * z)$. Deci, în general, legea $*$ nu este asociativă.

11. Trebuie ca $\begin{vmatrix} n & 12 \\ a & b \end{vmatrix} = \pm 1$, de unde rezultă că $(n, 12) = 1$. Deci $n \in \{1, 5, 7, 11\}$, adică mulţimea $A \cap \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ are 4 elemente. **12.** a) Se verifică uşor axiomele inelului; b) Se verifică uşor axiomele inelului; c) Aplicaţia $\varphi : \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \to I$, definită prin $\varphi(m + n\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} m & n \\ dn & m \end{pmatrix}$ este un izomorfism de inele; d) Fie $d \neq d'$ şi să presupunem că ar exista un izomorfism de inele $f : \mathbf{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbf{Z}[\sqrt{d'}]$. Se arată mai întîi că din $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, rezultă $f(a) = a$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$. Apoi, dacă $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, atunci $f(x) = a + bf(\sqrt{d})$. Fie $f(\sqrt{d}) = m + n\sqrt{d'}$ şi deci $d = f(d) = f(\sqrt{d}\sqrt{d}) = (m + n\sqrt{d'})^2 = m^2 + d'n^2 + 2mn\sqrt{d'}$. De aici, se obţine $d = m^2 + d'n^2$ şi $2mn = 0$, relaţii care conduc la o contradicţie. **13.** Fie x, y elemente oarecare dintr-un inel boolean. Considerînd $(x + y)(x + y) = x + y$ şi $(x - y)(x - y) = x - y$, rezultă $y = -y$ şi $xy = yx$. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$, elementul $u = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i x_j x_k + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_n$, are proprietatea că $x_i = ux_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. **14.** Se verifică cu uşurinţă axiomele inelului. Elementul neutru la adunare este $0 = (0, 0)$, iar elementul unitate este $1 = (1, 1)$. Are divizori ai lui zero, de exemplu $(1, 0)(0, 1) = (0, 0) = 0$. Avem că $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ este inversabil dacă şi numai dacă $x_1 \in A_1$ şi $x_2 \in A_2$ sînt inversabile. **15.** a) Dacă $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, atunci $mn \mid x - y$ şi cum $(m, n) = 1$, rezultă $m \mid x - y$ şi $n \mid x - y$, deci $\hat{x} = \hat{y}$ şi $\bar{x} = \bar{y}$; b) Conform pct. a), φ este bine definită. Din definiţii rezultă că φ este omomorfism de inele. Să arătăm că φ este injectiv. Dacă $\varphi(\overline{\overline{x_1}}) = \varphi(\overline{\overline{x_2}})$, atunci $(\hat{x}_1, \bar{x}_1) = (\hat{x}_2, \bar{x}_2)$, de unde $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ şi $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, sau $m \mid x_1 - x_2$ şi $n \mid x_1 - x_2$. Cum $(m, n) = 1$, avem că $mn \mid x_1 - x_2$ şi deci $\overline{\overline{x_1}} = \overline{\overline{x_2}}$. Mai mult, cum $\mathbf{Z}_{mn}$ şi $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ au acelaşi număr de elemente, rezultă că φ este şi surjectivă. **16.** Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri şi deci conform problemei **43**, $f = \varphi_n$, $n \in \mathbf{Z}$. Mai mult, $n = \varphi_n(1) = \varphi_n(1 \cdot 1) = \varphi_n(1)\varphi_n(1) = n^2$, de unde deducem $n = 0$ şi $n = 1$. Astfel sînt doar două omomorfisme de inele de la $\mathbf{Z}$ la $\mathbf{Z}$ şi anume φ_0 şi φ_1, adică cel nul şi cel identic. **17.** Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. În particular, f este un omomorfism de grupuri şi deci conform problemei **45**, cap. XIX, există $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ astfel încît $f(m) = m\hat{a}$, pentru orice $m \in \mathbf{Z}$. Mai mult, $\hat{a} = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = \hat{a}^2$. Reciproc, dacă luăm un element $\hat{a} \in \mathbf{Z}_n$ cu $\hat{a}^2 = \hat{a}$, atunci aplicaţia $\varphi_{\hat{a}} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$, $\varphi_{\hat{a}}(x) = x\hat{a}$ este un omomorfism de inele. **18.** Fie $f : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$ un omomorfism de inele. După problema **49**, cap. XIX, dacă $\bar{a} = f(\hat{1})$, atunci $m\bar{a} = \bar{0}$. Mai

mult, $\bar{a}^2 = \bar{a}$. Reciproc, dacă $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$ cu $m\bar{a} = \bar{0}$ și $\bar{a}^2 = \bar{a}$, atunci aplicația $\varphi_{\bar{a}} : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n$, $\varphi_{\bar{a}}(x) = x\bar{a}$ este un omomorfism de inele. **19.** I) Dacă $(a, n) = 1$, există $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încît $au + vn = 1$. Soluția ecuației este $x = \widehat{ub}$; II) Se poate demonstra prin reducere la absurd; III) Dacă $d = (a, n)$ și $d \mid b$, fie $n = n_1 d$ și $b = b_1 d$. Fie, de asemenea, $u, v \in \mathbf{Z}$ astfel încît $au + nv = d$. Atunci $x_0 = \widehat{ub_1}$, este o soluție a ecuației. Atunci $x_k = x_0 + \widehat{kn_1}$, $k = 0, 1, \ldots, d - 1$, sînt d soluții distincte ale ecuației. **20.** Observăm că $ux - uy = u(x - y)$ și $(ux)(uy) = u^2xy = uxy$ pentru orice $x, y \in A$, deci A_1 este subinel al lui A. Pentru partea a doua fie $A_2 = (1 - u)A = \{(1 - u)x \mid x \in A\}$. Deoarece $1 - u \in \{0, 1\}$ și $(1 - u)(1 - u) = 1 - 2u + u^2 = 1 - u$ rezultă conform celor de mai sus că A_2 este un subinel al lui A; c) și d) rezultă imediat acum din faptul că $u(1 - u) = u - u^2 = 0$. Din d) rezultă că scrierea lui $x \in A$ sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ este *unică*, deci $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ este bine definită. Faptul că $f : A \to A_1 \times A_2$, $f(x) = (x_1, x_2)$ pentru $x = x_1 + x_2$ (operațiile în A se efectuează „pe componente") este izomorfism rezultă acum imediat din c), d) și din unicitatea scrierii $x = x_1 + x_2$ (omomorfismul invers este $g : A_1 \times A_2 \to A$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$). **21.** a) Se verifică cu ușurință axiomele inelului; b) $f : A \to A_1$, $f(a) = (0, a)$ este izomorfismul căutat (se vede ușor că $A' = \{(0, a) \mid a \in A\}$ este un subinel al lui A_1). Operația $x \circ y = x + y - xy$ este asociativă și 0 este element neutru, deci $(A, \circ)$ este un monoid. Acum $x \in A$ este simetrizabil în $(A, \circ) \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.i. $x \circ y = y \circ x = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.i. $x + y - xy = y + x - yx = 0 \Leftrightarrow$ există $y \in A$ a.i. $(1 - x)(1 - y) = (1 - y)(1 - x) = 1 \Leftrightarrow (0, 1 - x) \in A_1$ este simetrizabil în A_1. **22.** a) Observăm că sistemul nu poate fi rezolvat prin metoda substituției, deoarece niciunul din coeficienții săi nu este inversabil în $\mathbf{Z}_{12}$. Scăzînd prima ecuație dintr-a doua obținem:

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1}, \\ x + y = \hat{1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{0}, \\ x + y = \hat{1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \widehat{11}, \\ y = \hat{2}. \end{cases}$$

b) Deoarece $\hat{7}$ este inversabil în $\mathbf{Z}_{12}$, putem aplica și metoda substituției, scoțînd pe x din prima ecuație. Sistemul este incompatibil. **23.** a) Fie $z = m + ni$. Avem $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 0 \Leftrightarrow m = n = 0 \Leftrightarrow z = 0$; b) Fie $z = m + ni$, $z' = m' + n'i$. Avem $\varphi(zz') = \varphi((m + ni)(m' + n'i)) = \varphi((mm' - nn') + (mn' + m'n)i) = (mm' - nn')^2 + (mn' + m'n)^2 = (m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2) = \varphi(z)\varphi(z')$; c) Fie $z, z' \in \mathbf{Z}[i]$, $z = m + ni$, $z' = m' + n'i \neq 0$. Atunci $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{m + ni}{m' + n'i} = \dfrac{mm' + nn'}{m'^2 + n'^2} + \dfrac{-mn' + m'n}{m'^2 + n'^2}i = \alpha + \beta i$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Alegem $u, v \in \mathbf{Z}$, astfel încît $|\alpha - u| \leqslant \dfrac{1}{2}$ și $|\beta - v| \leqslant \dfrac{1}{2}$ și punem $q = u + vi$. Se verifică că $r = z - qz'$, are proprietatea că

$\varphi(r) < \varphi(z')$; d) Avem $z \in \{-1, 1, -i, i\} \Rightarrow z$ este inversabil $\Rightarrow$ există $z' \in \mathbf{Z}[i]$ cu $zz' = 1 \Rightarrow \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z') = 1 \Rightarrow \varphi(z) = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 0$ şi $n^2 = 1$ sau $m^2 = 1$ şi $n^2 = 0 \Rightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\}$. **24.** c) Fie $z, z' \in \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$, $z = m + ni\sqrt{2}$, $z' = m' + n'i\sqrt{2} \neq 0$. Atunci $\frac{z}{z'} = \frac{m + ni\sqrt{2}}{m' + n'i\sqrt{2}} = \frac{mm' + 2nn'}{m'^2 + 2n'^2} + \frac{-mn' + m'n}{m'^2 + 2n'^2} i\sqrt{2} = \alpha + \beta i\sqrt{2}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Alegem $q = u + iv$, astfel incit $|u - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ şi $|v - \beta| \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luind $r = z - qz'$, obţinem că $\varphi(r) < \varphi(z')$. **25.** a), b), c). Analog cu problemele precedente; d) Fie $z = m + n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ un element inversabil. Există deci $z' = x + y\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ a.i. $zz' = 1$, ceea ce conduce la sistemul $mx + 2ny = 1$, $nx + my = 0$. Condiţia necesară şi suficientă ca pentru $m, n \in \mathbf{Z}$, daţi, sistemul precedent să aibă o soluţie unică cu $x, y \in \mathbf{Z}$ este: $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ (condiţia este evident suficientă, necesitatea rezultă deoarece conform primei ecuaţii $(m, n) = 1$ şi se ţine seama de forma termenului liber). Deci $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ inversabil. Definim acum recurent următorul şir de numere întregi: $x_0 = y_0 = 1$; $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$. Numerele de forma $x_n + y_n\sqrt{2}$ sint toate distincte, deoarece deducem de mai sus că $x_n + y_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$ şi evident $1 + \sqrt{2} \neq \pm 1$. Conform punctului b) al problemei (sau prin inducţie după n) rezultă că $\varphi(z_n) = \varphi(x_n + y_n\sqrt{2}) = 1$, deci numerele distincte $x_n + y_n\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ sint inversabile. **26.** Rezultă din problema 7 din acest capitol. **27.** Fie A un inel integru finit şi $a \in A$, $a \neq 0$. Definim $\varphi_a : A \to A$ prin $\varphi_a(x) = ax$. Deoarece A este integru rezultă că φ_a este injectivă şi cum A este finit este şi surjectivă. Există deci $a' \in A$ cu $aa' = 1$. Aplicăm acum problema 5. **28.** Evident K este închisă la adunarea şi înmulţirea numerelor reale. Mai trebuie verificat că orice element nenul din K are inversul (în raport cu înmulţirea numerelor reale) tot în K. Fie deci $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \neq 0$, cu $a, b, c \in \mathbf{Q}$. Dacă cel puţin unul din numerele a, b, c este nul (nu toate!) se verifică imediat că $\frac{1}{x} \in K$ prin amplificare cu conjugata numitorului. Dacă $abc \neq 0$ avem succesiv:

$$\frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{b}{a}\sqrt[3]{2} + \frac{b^2}{a^2}\sqrt[3]{4} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{b^3}{a^3} + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\sqrt[3]{2}\right)}{1 - 2\frac{bc}{a^2} \cdot \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\sqrt[3]{4}}$$

Amplificînd încă o dată cu conjugata numitorului obținem că $\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} \in K$. *Observație*. Exact ca și mai înainte se arată că dacă $\alpha \in \mathbf{Q}$ nu este cubul unui număr rațional atunci $K_1 = \{a + b\sqrt[3]{\alpha} + c\sqrt[3]{\alpha^2} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ este un corp. **29.** Fie $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ un omomorfism de corpuri. În particular, f este un omomorfism al grupului aditiv $(\mathbf{Q}, +)$ în el însuși. Conform problemei **46.** cap. XIX rezultă că există $q \in \mathbf{Q}$ astfel încît $f(x) = qx$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}$. Mai mult, $f(xy) = f(x)f(y)$ oricare $x, y \in \mathbf{Q}$ și deci $qxy = q^2xy$, de unde $q = 0$ și $q = 1$. Rezultă că singurul automorfism al corpului $\mathbf{Q}$ este cel identic. **30.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un automorfism al corpului $\mathbf{R}$. Din problema precedentă rezultă că $f(r) = r$ pentru $r \in \mathbf{Q}$. Fie acum $x > 0$. Există deci $y > 0$ cu $y^2 = x$ și prin urmare $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 > 0$. Rezultă că pentru orice $x < y$ avem $-f(x) + f(y) = f(y - x) > 0$, adică f este strict crescătoare. Vom arăta că f este omomorfismul identic al lui $\mathbf{R}$. Presupunem prin absurd, că f nu este omomorfismul identic și fie $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ cu $f(x) \neq x$. Dacă $f(x) < x$ alegem $r \in \mathbf{Q}$ cu $f(x) < r < x$ și obținem $f(r) = r > f(x)$, contrar monotoniei lui f. Analog, se ajunge la contradicție pentru $f(x) > x$. **31.** Fie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ un morfism de corpuri cu $f(x) = x$ pentru $x \in \mathbf{R}$. Dacă $f(\mathrm{i}) = \alpha$, atunci $-1 = f(-1) = f(\mathrm{i}^2) = (f(\mathrm{i}))^2 = \alpha^2$, deci $\alpha \in \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Pentru $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ obținem $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x + f(\mathrm{i})y = x + \mathrm{i}y = z$ iar pentru $f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ obținem $f(z) = \bar{z}$. Deci singurele morfisme de corpuri $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ care invariază $\mathbf{R}$ sînt identitatea și conjugarea, care sînt evident chiar automorfisme. **32.** c) Aplicația $f : \mathbf{Q}(\sqrt{d}) \to K$, $f(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}$ este un izomorfism de corpuri. **33.** Fie K un corp comutativ. Să presupunem prin absurd că $f : (K, +) \to (K^*, \cdot)$ este un izomorfism de grupuri. Atunci $f(0) = 1$ și există $x \in K$, $x \neq 0$, cu $f(x) = -1$. Avem $f(-x) = f(0 - x) = \frac{f(0)}{f(x)} = \frac{1}{-1} = -1$. Cum f este injectivă rezultă $x = -x$, adică $2x = 0$. Deci $(2 \cdot 1_K)x = 0$ (1_K fiind unitatea corpului K), de unde $2 \cdot 1_K = 0$. Este clar că $2y = 0$, oricare $y \in K$. Avem $1 = f(0) = f(2.1) = (f(1))^2$. Dar $(f(1))^2 - 1 = (f(1) - 1)^2 = 0$. Deci $f(1) - 1 = 0$, adică $f(1) = 1$. Cum f este injectivă, rezultă $1 = 0$, contradicție. **34.** Elementul unitate este $(1, 0)$. Dacă $(a, b) \neq (0, 0)$, atunci $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$. $K_1 = \{x, 0) \mid x \in K\} \underset{\neq}{\subset} K \times K$ este un subcorp al lui $K \times K$ și aplicația $f : K \to K_1$ definită prin $f(x) = (x, 0)$ este un izomorfism de corpuri. Ecuația $x^2 + 1 = 0$ are în corpul $K \times K$ soluția $x = (0, 1)$. Fie $K = \mathbf{Z}_p$, p număr prim de forma $4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$. Să presupunem că $x \in K$, are proprietatea $x^2 + 1 = 0$. Atunci după teorema lui Fermat (problema **68.** cap. XIX), rezultă $1 = x^{p-1} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$, contradicție. **35.** Dacă $\alpha = \hat{1}$, rangul matricei este 2.

Dacă $\alpha \neq \hat{1}$, rangul este 3. **36.** Matricea este inversabilă numai pentru $\alpha = 0$, inversa în acest caz fiind $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **37.** G are 27 elemente. **38.** a) Sistemul este nedeterminat: $x = 4 + 3\lambda$, $y = 3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}_5$; b) Sistemul are soluție unică: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **39.** Sistemul este compatibil nedeterminat, pentru orice $\alpha \in \mathbf{Z}_5$. Pentru $\alpha \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}\}$, un minor principal este dat de coeficienții necunoscutelor x_1, x_2, x_3. Pentru $\alpha \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$, un minor principal este dat de coeficienți necunoscutelor x_1, x_2, x_4. **41.** a) $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$ este ireductibil; b) $X^4 + X^2 + 1 \in \mathbf{Z}_2[X]$ este ireductibil; c) $X^5 + 1 = (X + 1)(X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1)$; d) $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. **42.** Polinomul este ireductibil pentru $a = \hat{2}$. **43.** Conform teoremei lui Fermat, $x^6 = 1$ pentru $x \in \mathbf{Z}_7$. Dacă $a \neq \hat{0}$, atunci pentru $x = a^{-1}$, obținem: $(a^{-1})^6 + aa^{-1} + 5 = \hat{1} + \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$. Deci pentru $a \neq \hat{0}$, polinomul este reductibil. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $X^6 + \hat{5} = (X^3 - \hat{3})(X^3 + \hat{3})$. **44.** b) O matrice pătratică cu coeficienți din K este inversabilă $\Leftrightarrow$ orice combinație liniară cu coeficienți din K, care nu sînt toți nuli, a liniilor (respectiv coloanelor) sale este nenulă. Deci pentru a găsi numărul matricelor din $GL_n(K)$ procedăm astfel: Considerăm mai întîi o linie arbitrară, nenulă, cu n elemente din K. Sînt $q^n - 1$ posibilități de alegere a acesteia. Apoi, alegem o linie care să fie independentă de prima (să nu se obțină din prima prin înmulțire cu un număr). Sînt $q^n - q$ posibilități de alegere a acesteia. Fie o altă linie care să nu fie combinație liniară de primele două. Sînt $q^n - q^2$ posibilități de alegere a acesteia ş.a.m.d. Se găsesc $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \ldots (q^n - q^{n-1})$ matrice cu proprietatea că nu există o combinație liniară cu coeficienți nu toți nuli a liniilor sale. Aceste matrice sînt toate elementele lui $GL_n(K)$.

Capitolul XXI

PROBLEME PENTRU CONCURSURI DE MATEMATICĂ

1. Dacă toate aplicațiile f_n $(n \geqslant 1)$ sînt surjective, afirmația este evidentă. Pentru cazul general, se notează pentru fiecare $k \geqslant 0$ mulțimile $B_{k,t} = (f_{k+1} \circ f_{k+2} \circ \ldots \circ f_{k+t})(A_{k+t})$ oricare $t \geqslant 1$. Avem şirul descendent $A_k \supseteq B_{k,1} \supseteq B_{k,2} \supseteq \ldots \supseteq B_{k,t} \ldots$. Cum A_k este finită, există un t_0 astfel încît $B_{k,t_0} = B_{k,t_0+1} = \ldots$. Notăm $B_k = B_{k,t_0}$. Avem $B_k \neq \emptyset$. În continuare se arată că restricția aplicațiilor f_k la B_k este o funcție surjectivă de la B_k la B_{k-1}. **2.** Fie $f(0) = \alpha$. Dacă $\alpha = 0$, din condiția problemei, rezultă pentru $y = 0$, $f(f(x)) = f(x)$, oricare $x \in [0, 1]$. Dacă presupunem că $\alpha \neq 0$, se arată

prin inducţie matematică că $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(\alpha) = (n+1)\alpha$. Pentru n suficient de mare avem $(n+1)\alpha > 1$, ceea ce contrazice faptul că $f(x) \leqslant 1$, oricare $x \in [0, 1]$. Deci $\alpha = 0$, caz analizat mai înainte. Funcţia $g : [0, 1] \to [0, 1]$, definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \beta \\ 1, & \beta < x \leqslant 1, \end{cases}$ unde $\beta \in (0, 1)$, satisface condiţia problemei. **3.** Se înlocuieşte x cu $b - a - x$ şi se obţine egalitatea $\alpha f(b - x) + \beta f(a + x) = g(b - a - x)$. Împreună cu relaţia din enunţ se obţine un sistem liniar din care se deduce $f(a + x)$; din aceasta se obţine imediat $f(x)$. **4.** Avem $a_n = \sqrt{a_0^2 + n}$. Dacă $a_0 = 0$ se obţine şirul $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n}$, ... care conţine subşirul infinit $\{\sqrt{p}\}$, unde p este număr prim şi în care toate elementele sînt numere iraţionale. Dacă $a_0 \neq 0$, considerăm subşirul dat de $n = (p - 1)a_0^2$, unde p este număr prim şi în care toate elementele sale sînt numere iraţionale. **5.** Se arată mai întîi că $\sqrt{4n + 1} < \sqrt{n} + \sqrt{n + 1} < \sqrt{4n + 2}$, de unde rezultă imediat că $[(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1})^2] = 4n + 1$. **6.** Mulţimea cerută este $\{0, 1\}$. **7.** Pentru $k \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. **8.** Avem $(a + b - c)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{5}{3} + 2(ab - ac - bc) \geqslant 0 \Rightarrow 2(ac + bc - ab) \leqslant \frac{5}{3} \Rightarrow ac + bc - ab \leqslant \frac{5}{6} < 1$. **9.** Să presupunem că $x \leqslant y \leqslant z$. Atunci $z - x \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz} \Rightarrow 9(z - x)^2 \leqslant 8[(x - y)^2 + (y - z)^2]$ sau $2[(x - y)^2 + (y - z)^2] \geqslant [(x - y) + (y - z)]^2$, inegalitate adevărată în mod evident. **10.** $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow 7 > \frac{m^2}{n^2}$ sau $7n^2 > m^2$. Avem că $7 \nmid m^2 + 1$ şi $7 \nmid m^2 + 2$. Deci $7n^2 \geqslant m^2 + 3$, de unde $7 \geqslant \frac{m^2 + 3}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^2}\left(m + \frac{1}{m}\right)^2$ sau $\sqrt{7} \geqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{mn}$. Egalitatea are loc pentru $m = 1$, dar în acest caz se vede că $\sqrt{7} > 2 > \frac{2}{n}$. **11.** Avem $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k + 1} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right) < \frac{a_{k+1}}{k + 1}$ sau $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < a_{k+1}$. Dacă considerăm funcţia $S : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $s(k) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$, aceasta este crescătoare şi deci pentru $k < n$ avem $S(k) < S(n)$, adică inegalitatea din stînga. Pentru cealaltă inegalitate considerăm şirul $-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_1$ şi avem $\frac{(-a_n) + \ldots + (-a_{k+1})}{n - k} < \frac{(-a_n) + \ldots + (-a_1)}{n}$ **12.** Inegalitatea se scrie $0 \leqslant (n - 3)(x^4 + y^4 + z^4) +$

$+ (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2$. Rezultă $n = 3$. **13.** Pentru $m < n$, scriem suma $S = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{i} \max(i, k) + \sum_{k=i+1}^{n} \max(i, k)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{i} i + \sum_{k=i+1}^{n} k\right) = \sum_{i=1}^{m} (i^2 + (i+1) + (i+2) + \ldots + n)$, care calculată ne dă $S = \frac{m}{12}(m^2 - 1 + 3n^2 + 3n)$. Pentru $m = n$, scriem $S = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m} \max(i,k) + \sum_{k=1}^{m} \max(m, k)$. Dar, de mai înainte, se obține $\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m} \max(i, k) = \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}$. Este clar că $\sum_{k=1}^{m} \max(m, k) = m^2$; deci $S = m^2 + \frac{m(m-1)(4m+1)}{12}$. **14.** Observăm că pentru $m^2 \leqslant k < (m+1)^2$, avem $[\sqrt{k}] = m$. Scriem $S = \sum_{k=1}^{2^2-1} [\sqrt{k}] + \sum_{k=2^2}^{3^2-1} [\sqrt{k}] + \ldots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} [\sqrt{k}] + n$ și ținînd seamă de observația de mai sus se obține, după calcule, $S = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$. **15.** Se face schimbarea $y = x - 2$ și se obține inegalitatea $(m-1)y^2 + (3m-1)y + 2m - 6 > 0$, care trebuie să fie adevărată pentru orice $y > 0$. **16.** $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$. **17.** $a \neq 0$, $b = 0$ și $a \neq 0$, $b = 1$. **18.** Se logaritmează ambii membri și grupînd termenii se obține $(a_2 - a_n)(\lg a_2 - \lg a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)(\lg a_{n-1} - \lg a_n) \geqslant 0$. Dar $a_{k-1} - a_k$ și $\lg a_{k-1} - \lg a_k$ au același semn și deci totul rezultă. **19.** Dacă $0 < x < 1$ egalitatea este evidentă. Dacă $x \geqslant 1$, atunci $x = 2^k \cdot 2^\alpha$, $k \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < 1$. De aici $\log_2 x = k + \alpha$ și deci $[\log_2 x] = k$. Din $[x] \leqslant x$ rezultă $k \leqslant \log_2[x] \leqslant k + \alpha$ și $[\log_2[x]] = k$. Deci $0 \leqslant \log_2 x - \log_2[x] \leqslant \alpha$, de unde $[\log_2 x - \log_2[x]] = 0$. Celălalt membru este, de asemenea, zero. **20.** Fie $s = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$. Avem

$$2s = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} < \frac{1}{a_0a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} = \frac{1}{d}\left(\frac{a_1 - a_0}{a_0a_1} + \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} + \cdots + \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}} + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{a_{2n-1}a_{2n}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{2n}}\right) = \frac{2n}{a_0a_{2n}}.$$

Deci $s < \frac{n}{a_0a_{2n}}$. Analog, se demonstrează cealaltă

inegalitate. **21.** Pentru $m = 1$, $n = 2 \Rightarrow f(2) = f(1)f(2) \Rightarrow f(1) = 1$; $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) = 2 \cdot 2 = 4$. $2 < 3 < 4 \Rightarrow f(2) < f(3) < f(4) \Rightarrow 2 < f(3) < 4 \Rightarrow f(3) = 3$. Presupunem că pentru $k < n$ avem $f(k) = k$. Fie $n = 2p \Rightarrow f(n) = f(2 \cdot p) = 2 \cdot f(p) = 2 \cdot p \Rightarrow f(n) = n$. Dacă $n = 2p - 1 \Rightarrow f(n + 1) = f(2p) = 2p$. $n - 1 < n < n + 1 \Rightarrow f(n - 1) < f(n) < f(n + 1) \Rightarrow n - 1 < f(n) < n + 1 \Rightarrow f(n) = n$. Deci $f = 1_{\mathbf{N}}$. **23.** Se poate demonstra prin inducție matematică. Fie n numărul maxim de cititori aflați la un anumit moment dat în sala de lectură. Dacă $n = 1$, atunci toți cititorii au intrat succesiv. Pentru a trece de la pasul n la pasul $n + 1$, observăm că problema rămîne evident aceeași dacă îi adăugăm presupunerea suplimentară că de fiecare dată al $(n + 1)$-lea cititor intrat în sală iese primul dintre cei $n + 1$. Fiecare astfel de cititor va scrie de fiecare dată numerele (n, n), problema revenind la pasul precedent. **24.** Fie $E = C_{2^n}^{2^{n-1}} - C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$. Se arată prin calcul că $E + 2^{2^{n-1}} C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}} \left(\frac{1}{1(2^{n-1} - 1)} + \frac{1}{2(2^{n-1} - 2)} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-2} - 1)(2^{n-2} + 1)} \right)$ se divide cu 2^{2n}. Dar se arată că $C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}} \left(\frac{1}{1(2^{n-1} - 1)} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-2} - 1)(2^{n-2} + 1)} \right)$ este multiplu de 2. (Se ține cont că $2 \mid C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}}$).

25. $5^{\sqrt{6}} < 6^{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5^{\sqrt{30}} < 6^5 \Leftrightarrow 5^{2\sqrt{30}} < 6^{10}$. Dar $5^{2\sqrt{30}} < 5^{11}$. Se arată că $5^{11} < 6^{10}$. Într-adevăr, $6^{10} = (5 + 1)^{10} = 5^{10} + C_{10}^1 \cdot 5^9 + C_{10}^2 \cdot 5^8 + C_{10}^3 \cdot 5^7 + \ldots + C_{10}^9 \cdot 5 + C_{10}^{10} > 5^{10} + 10 \cdot 5^9 + 5 \cdot 9 \cdot 5^8 + 120 \cdot 5^7 > 5^{11}$. **26.** Fie $\alpha = (\sqrt{26} + 5)^{101}$. Avem $\alpha = (\sqrt{26} + 5)^{101} - (\sqrt{26} - 5)^{101} + (\sqrt{26} - 5)^{101} = a + (\sqrt{26} - 5)^{101} = a + \frac{1}{(\sqrt{26} + 5)^{101}} < a + \frac{1}{(2 \cdot 5)^{101}} = a + \frac{1}{100^{101}} = a,\underbrace{00 \ldots 0}_{100\ \text{ori}}1$ $(a \in \mathbf{Z})$. **27.** Dacă notăm $S_m = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m$, observăm că $S_0 + S_{n-1} = S_1 + S_{n-2} = \ldots = S_{n-1} + S_0 = 2^n$. **28.** Se poate demonstra folosind varianta a doua a metodei inducției matematice, după numărul b al băieților. **29.** Numerele de forma $n_k = 3^k$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. **30.** $p = 3$. **31.** Presupunem prin absurd, că există $n \mid 2^n - 1$. Fie p cel mai mic număr prim care divide pe n, iar k cel mai mic număr natural astfel încît $p \mid 2^k - 1$. Avem $p \mid 2^k - 1$ și $p \mid 2^{p-1} - 1$ (conform micii teorme a lui Fermat). Deci $k \mid p - 1$. Dar $n \mid 2^n - 1$ și $p \mid n$ implică $k \mid n$. Așadar k este un divizor al lui n mai mic decît p, contradicție. **32.** Numerele de forma $n_k = (p - 1)(pk + 1)$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. **33.** Avem $5 \mid 2^n - 3 \Leftrightarrow 4 \mid n - 3$ și $13 \mid 2^n - 3 \Leftrightarrow 12 \mid n - 4$. Se arată că nu există nici un număr natural n care să satisfacă în același timp condițiile $4 \mid n - 3$ și $12 \mid n - 4$. **34.** Observăm mai întîi că dacă $3 \nmid a$, atunci $3 \mid a + 1$ sau $3 \mid a - 1$, de unde $9 \mid a^3 + 1$ sau $9 \mid a^3 - 1$. Așadar, dacă

3 nu divide nici unul dintre numerele a, b, c, d, e, atunci $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 9k \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, care nu este multiplu de 9, contradicție. **35.** a) Numerele $n_k = 1 - a + k(a - b)$, $k \in \mathbf{N}$, au proprietatea cerută. b) Se folosește punctul a). **37.** $x_1 = x_2 = \ldots = x_9 = 7$. **38.** Se arată că $2^{2^{n+1}} + 3$ este multiplu de 7. **4** $p(q(x)) = x$. **43.** Fie $u_i = q_i m + r_i$, $0 \leqslant r < m$. Observăm că $X^m - 1 = (X - 1)P(X)$. Apoi, $X^{u_i} = X^{q_i m + r_i} = X^{r_i}(X^{q_i m} - 1) + X^{r_i}$. Cum $X^m = (X - 1)P(X) + 1$, obținem $X^{q_i m} = A_i(X)P(X) + 1$, unde $A_i(X)$ este polinom în X. Deci $Q(X) = G(X)P(X) + (X^{r_1} + X^{r_2} + \ldots + X^{r_n})$. Așadar $P(X) \mid Q(X) \Leftrightarrow P(X) \mid X^{r_1} + X^{r_2} + \ldots + X^{r_n} (= H(X))$. Dar cum $H(X) = n_0 + n_1 X + \ldots + n_{m-1}X^{m-1}$ are gradul mai mic sau egal decît *grad* $P(X)$, rezultă că $P(X) \mid H(X) \Leftrightarrow$ există $\alpha \in \mathbf{R}$, astfel încît $H(X) = \alpha P(X)$. De aici rezultă $n_0 = n_1 = \ldots = n_{m-1}$. **44.** Se poate demonstra prin inducție după n=grad P. **45.** $\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(2) < \sigma(1)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) =$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)+1}(m(\sigma) + 1) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)+1} =$$

$= - \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (-1)^{m(\sigma)}$. Dacă $n \geqslant 4$, există pentru orice permutare pară (impară) cu condiția $\sigma(1) < \sigma(2)$ o permutare impară (pară) cu aceeași condiție $\sigma(1) < \sigma(2)$. Deci ultima sumă este zero. Deci $\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{m(\sigma)} m(\sigma) = 0$ pentru $n \geqslant 4$. Se verifică ușor că pentru $n = 2$ și $n = 3$ suma este egală cu -1.

47. $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ unde $k = \left[\frac{b}{a + b}(n + 1)\right]$. **48.** Avem

$$\det A = \begin{vmatrix} 13 \cdot 102 + 1 & 13 \cdot 111 & 13 \cdot 223 \\ 13 \cdot 331 & 13 \cdot 321 + 1 & 13 \cdot 123 \\ 13 \cdot 132 & 13 \cdot 104 & 13 \cdot 131 + 1 \end{vmatrix}.$$

Folosind proprietățile determinanților, acesta rezultă egal cu

$$13k + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13k + 1, \text{ unde } k \in \mathbf{Z}. \text{ Deci } \det A \neq 0.$$

49. Cum $e \in H$ rezultă $a = ae \in bK$, de unde $a = bk$, $k \in K$ și deci $b^{-1}a \in K$. De aici rezultă $H \subset K$. **50.** Se poate observa că ecuația $x^3 - 1 = 0$ are trei soluții în $\mathbf{C}$ și doar una în $\mathbf{R}$. **52.** Avem $H \cap \mathbf{Z} \neq \{0\}$ și deci $H \cap \mathbf{Z} = n\mathbf{Z}$, $n > 0$. De aici rezultă $n\mathbf{Q} \subset H$. Dar $n\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ și deci $\mathbf{Q} = H$. **53.** Din $a^2 = b^2 \Rightarrow a = a^{-1}b^2$, $a = b^2a^{-1}$ și $ab^{-1} = a^{-1}b$. Din $a^2 = abab \Rightarrow a = bab$ și $ab^{-1} = ba$. Deci $a^{-1}b = ba$, de unde $(ab)^2 = abab = (a^{-1}b^2)b(b^2a^{-1})b = a^{-1}b^5(a^{-1}b) = a^{-1}b^5(ba) = a^{-1}(a^6)a = a^6$ (deoarece $a^2 = b^2$). Deci $a^2 = (ab)^2 = a^6 \Rightarrow a^4 = e$. De asemenea $b^4 = e$. **54.** $b^{2n} = (b^n)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Analog, $b^{3n} = (b^n)^3 = ab^3a^{-1}$.

Mai mult, $(b^n)^n = b^{n^2} = ab^na^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2} = b$ (deoarece $a^2 = e$). Deci $b^{n^2} = b$, de unde $b^{n^2-1} = e$. **55.** $b^{2k} = (b^k)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}$. Mai mult, $b^{k^2} = (b^k)^k = ab^ka^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2}$. Apoi, $(b^{k^2})^k = (a^2ba^{-2})^k = a^2b^ka^{-2} = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3} \Rightarrow b^{k^3} = a^3ba^{-3}$. În general, $b^{k^m} = a^mba^{-m} = b$ (deoarece $a^m = e$). Deci $b^{k^m-1} = e$. **57.** Se folosește egalitatea $(1+1)(a+b) = (1+1)a + (1+1)b$. **58.** Dacă $u \in A$ este inversul lui $1-ab$, atunci inversul lui $1-ba$ este $1+bua$. **60.** Se folosește identitatea $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$, precum și problema 58. **61.** Pentru a arăta că este corp se folosește problema 5, cap. XVII. Soluțiile ecuației sînt matricele $A(a, b, c, d)$ astfel încît $a=0$ și $b^2+c^2+d^2=1$. **62.** Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm $\mathrm{Tr}\, A = a+d$; A verifică ecuația $x^2 - (a+d)x + (ad-bc)I_2 = 0$. Dacă $\mathrm{Tr}\, A = 0$, atunci $A^2 = (bc - ad)I_2$ și deci A^2 comută cu orice matrice din $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Se arată că $\mathrm{Tr}([A, B]) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$, de unde rezultă afirmația i). Din afirmația i) se obține ii). **63.** Din $x^6 = x$ și $(-x)^6 = -x$ rezultă $x = -x$, adică $2x = 0$, oricare ar fi $x \in A$. Din $(x+1)^6 = x+1$, dezvoltînd membrul stîng, se obține: $(x^6 - x) + 2(3x^5 + 7x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 3x) + (x^4 + x^2) = 0$, de unde $x^4 + x^2 = 0$, adică $x^4 = -x^2 = x^2$. Înmulțind ambii membri ai egalității $x^4 = x^2$ cu x^2 se obține că $x^2 = x$.

BIBLIOGRAFIE

1) *Alef$_0$, Algebră (Numere reale, calcul numeric, numere complexe)*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.
2) Becheanu M., Căzănescu V., Năstăsescu C., Rudeanu S., *Logică matematică şi teoria mulţimilor* (manual pentru anul II liceu, clase speciale de matematică), Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
3) Călugăriţa Gh., Mangu V., *Probleme de matematică pentru treapta I şi a II-a de liceu*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1977.
4) Commissaire H., Anzemberger E., *Exercices d'Algèbre et de Trigonomètrie*, Paris, 1923.
5) Coşniţă C., Turtoiu F., *Culegere de probleme de algebră*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1972.
6) Chiriac V., Chiriac M., *Probleme de algebră*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1977.
7) Dorofeev G. V., Potapov M. K., Rozov N. H., *Posobie po matematike dlia postupaiuşcih v vuzi*, Moskva, 1976.
8) Fadeev D. K., Sominski I. S., *Culegere de probleme de algebră superioară*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
9) Georgescu-Buzău E., Matei N., *Exerciţii de teoria mulţimilor*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.
10) Iaglom I. M., Iaglom A. N., *Probleme neelementare tratate elementar*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1962.
11) Ioachimescu A. G., Culegere de probleme de algebră, ediţia a V-a, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
12) Ionescu-Ţiu C., Pîrşan L., *Algebră şi analiză matematică pentru admitere în facultate*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1974.
13) Ikramov H. D., *Zadacinik po lineinoi algebre*, Moskva, 1975.
14) Kuterov A., Rubanov A., *Zadacinik po algebre i elementarnim funcţiiam*, Moskva, 1974.
15) Năstăsescu C., *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.
16) Niţă C., Spircu T., *Probleme de structuri algebrice*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1974.
17) Novoselov S. I., *Curs special de algebră elementară*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.

18) Perju C., Perju R., *Probleme de matematică pentru admitere în învățămîntul superior*, Ed. militară, București, 1974.
19) Rusu E., *Aritmetică și teoria numerelor*, Ed. tehnică, București, 1964.
20) Sklearski D. O., Cențov N. N., Iaglom I. M., *Izbrannie zadacii teoremi elementarnoi matematiki (Arifmetica i algebra)*, Moskva, 1965.
21) Sominski I. S., Golovina L. I., Iaglom I. M., *O matematicescoi inducții*, Moskva, 1967.
22) Stamate I., Crișan I., *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică pentru licee*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1969.
23) Stamate I., Stoian I., *Culegere de exerciții și probleme de algebră*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1979.
24) *Matematică—Algebră* (manuale de liceu clasele IX—XII, ediția 1980) Ed. didactică și pedagogică, București. 1980.
25) Colecția „Gazeta matematică-seria B".
26) Colecția „Matematika v școle".

CUPRINS

PARTEA ÎNTÎI
ENUNȚURI

PARTEA A DOUA
INDICAȚII, SOLUȚII, RĂSPUNSURI